

ANNALES DES CONCOURS

PSI
Physique et Chimie
2014

Sous la coordination de

Sébastien DESREUX

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Vincent FREULON

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Alexandre HÉRAULT

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Virgile ANDREANI
ENS Ulm

Olivier FRANTZ
Professeur agrégé en école d'ingénieur

Michel FRUCHART
ENS Lyon

Alexandre HÉRAULT
Professeur en CPGE

Cyril JEAN
ENS Ulm

Tom MOREL
Professeur en CPGE

Stéphane RAVIER
Professeur en CPGE

Christelle SERBA
ENS Lyon

Principales disparitions du programme de physique-chimie en PSI

PHYSIQUE

- loi de Biot et Savart
- potentiels vecteurs

Électromagnétisme

- référentiels non galiléens
- forces d'inertie

Mécanique

- miroirs sphériques
- formules de conjugaison pour les lentilles minces
- optique ondulatoire hormis diffraction par une fente ou deux fentes fines

Optique

- potentiels thermodynamiques
- travail maximum récupérable

Thermodynamique

CHIMIE

- diagrammes d'Ellingham

Thermodynamique

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
E3A			
Physique	Montage générateur de signaux. Modèle simplifié d'un geyser. <i>électrocinétique, thermodynamique, mécanique des fluides, phénomènes diffusifs</i>	10	22
Physique et Chimie	Isolation thermique et phonique. <i>diffusion thermique, ondes sonores, cristallographie, thermochimie, cinétique chimique</i>	41	54
CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES			
Physique	Refroidissement de l'hélium à 1,9 K. <i>thermodynamique, mécanique des fluides, électrocinétique, hydrostatique, mécanique</i>	77	92
Physique et Chimie	Cuivre et supraconductivité. <i>cristallographie, diagrammes E-pH, oxydoréduction, solutions aqueuses, électricité, magnétostatique, thermodynamique, diffusion</i>	105	119

MINES-PONTS

Physique 1	De la physique autour d'un tore. <i>mécanique du solide, électromagnétisme, modèle de Drude, induction, transformateur, ferromagnétisme</i>	141	146
Physique 2	Lévitiation magnétique. <i>magnétostatique, mécanique du solide, amplificateur opérationnel</i>	159	166
Chimie	Autour du vanadium. <i>cristallographie, diagrammes E-pH, oxydoréduction, cinétique chimique</i>	180	186

CENTRALE-SUPÉLEC

Physique	Quelques aspects de la physique du viseur de casque TopOwl. <i>électromagnétisme, magnétostatique, mécanique du point, induction</i>	196	204
Physique et Chimie	Analyse physico-chimique des acides d'un vin. <i>chimie des solutions, mécanique des fluides, ondes électromagnétiques, cinétique chimique, cristallographie</i>	220	227

FORMULAIRES

Constantes physiques	251
Constantes chimiques	248
Formulaire d'analyse vectorielle	252
Classification périodique	256

E3A Physique PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet étudie deux exemples de systèmes oscillants, le premier en électronique, le second en thermodynamique et mécanique des fluides.

- Après une courte première partie sur l'amplificateur opérationnel idéal, on étudie dans deux parties séparées les deux constituants d'un générateur électronique de signaux : le comparateur à hystérésis et le montage intégrateur inverseur, avant de les rassembler pour constituer le générateur. On commence par établir les fonctions de transfert des circuits, dont on se sert pour calculer explicitement, au moyen d'une décomposition de Fourier, leur signal de sortie lorsqu'ils sont soumis à une excitation périodique. Cette première partie cherche chez le candidat la capacité à décrire l'évolution temporelle des signaux électriques d'un circuit complexe. La dénomination « amplificateur opérationnel » a été remplacée par « amplificateur linéaire intégré » depuis la rentrée 2014, il s'agit pourtant du même composant. L'énoncé, ainsi que ce corrigé, utilisent la première appellation mais on peut substituer partout ALI à AO.
- La deuxième moitié du sujet détaille le fonctionnement d'un geyser, système oscillant original dont le modèle ici est simplifié mais déjà assez réaliste. Elle débute par quelques notions de thermodynamique des corps purs, et se poursuit par une partie de mécanique des fluides qui nécessite une certaine intuition physique. S'appuyant sur l'équation de Navier–Stokes, qui ne figure plus au programme de PSI depuis la rentrée 2014, elle est néanmoins faisable en grande partie si l'on admet la formule, qui est rappelée par le sujet. L'avant-dernière section, très classique, fait redémontrer la loi de Poiseuille, et le sujet se termine avec un peu de diffusion thermique.

L'ensemble des questions reste proche du cours, ce qui fait de ce sujet un bon exercice d'entraînement durant l'année.

INDICATIONS

Première partie

- B1 Chercher dans le schéma électrique un pont diviseur de tension.
- B3 Les basculements se font lorsque ε change de signe.
- B4 Chercher la valeur de v_S selon les valeurs que peut prendre ε . Puis partir de $v_E = -V_{\text{SAT}}$, faire augmenter v_E et regarder comment évolue ε .
- C1 À quoi les dipôles sont-ils équivalents à haute et basse fréquence ?
- C2 Utiliser le pont diviseur de tension entre E et S.
- C4 Passer du domaine fréquentiel au domaine temporel grâce à l'équivalence
- $$j\omega \Leftrightarrow \frac{d}{dt}$$
- C5 v_{S_n} est la composante de pulsation $n\omega$ du signal de sortie, c'est donc une pure sinusoïde (pas de constante d'intégration).
- C6 Pourquoi le signal de sortie est-il de moyenne nulle ?
- D2 Résoudre cette question sans supposer que $R_2 = 2R_1$.
- D2, D3 Raisonner de manière séquentielle à partir d'une valeur de v_S .

Deuxième partie

- E5 Séparer les variables pour intégrer l'équation différentielle.
- F4 L'eau liquide a la même vitesse tout au long de la colonne, elle vaut dZ/dt .
- F5 Ce n'est pas parce que la pression dans la cavité diminue que la colonne d'eau ne peut pas être poussée vers le haut.
- F9 Penser à la formule de Torricelli, ou raisonner sur l'énergie d'une gouttelette d'eau à la sortie du geyser.
- G2 Ce résultat découle de l'équation de Navier–Stokes, que l'on peut drastiquement simplifier sous les hypothèses de cette partie.
- G3 Résister à la tentation de développer la dérivée, remarquer que $f(x) = g(r)$ n'est vraie pour tout x et r que si les deux fonctions sont constantes.
- G5 Penser à un équivalent des lois des mailles et des nœuds pour établir l'analogie.
- H3 Erreur d'énoncé : $T - T_R$ est à exprimer en fonction de $T_E - T_R$ et d'une constante de temps τ_E à préciser en fonction de m_{eau} , c_{eau} , S_e et h .
- H4 Le temps mis par l'eau pour atteindre sa température d'ébullition dépend aussi bien sûr de sa température initiale T_E , que l'énoncé a oubliée.

I. GÉNÉRATEUR DE SIGNAUX

A1 Les hypothèses de l'AO idéal sont :

- une impédance d'entrée infinie, ce qui implique des courants de polarisation nuls ($i_- = i_+ = 0$) ;
- une résistance de sortie nulle ;
- l'absence de tension d'offset (ε est nul en régime linéaire) ;
- un gain infini à toutes les fréquences.

A2 Lors d'un fonctionnement en régime linéaire, les tensions de l'AO respectent

$$\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad -V_{\text{SAT}} < v_S < V_{\text{SAT}}$$

En régime saturé,

$$\varepsilon \neq 0 \quad \text{et} \quad v_S = \pm V_{\text{SAT}}$$

On peut distinguer ces régimes en observant v_S : si elle vaut V_{SAT} en valeur absolue le régime est saturé, il est linéaire sinon.

B1 L'AO étant supposé idéal, il n'y a pas de courant à son entrée E^+ ; on reconnaît un pont diviseur de tension entre les points S et E :

$$\begin{aligned} v_{E^+} &= v_E + (v_S - v_E) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{v_S R_1 + v_E R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

L'entrée inverseuse de l'AO étant reliée à la masse, $\varepsilon(t) = v_{E^+}(t)$ d'où, en injectant dans l'équation différentielle,

$$\tau \frac{dv_S(t)}{dt} + v_S(t) = A_d \frac{v_S(t) R_1 + v_E(t) R_2}{R_1 + R_2}$$

soit

$$\tau \frac{dv_S(t)}{dt} + \left(1 - A_d \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) v_S(t) = A_d \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_E(t)$$

Avec $R_2 = 2R_1$, le coefficient de v_S , $(1 - A_d/3)$, est négatif car $A_d \gg 1$, donc les coefficients de v_S et de sa dérivée sont de signes opposés ; par conséquent, d'après le critère de Routh l'équation différentielle est **instable** : ses solutions divergent, ce qui entraîne un **fonctionnement saturé** de l'AO.

On pouvait déduire sans calcul ce comportement du montage électrique, en observant que l'AO est branché en « rétroaction positive », ou en d'autres termes que sa sortie n'est connectée qu'à son entrée non inverseuse. Ceci est une condition suffisante d'un fonctionnement saturé. En effet, partant d'un ε et d'une sortie v_S nuls tous les deux, si la sortie v_S , par une quelconque fluctuation aussi petite soit-elle, est déplacée de sa valeur nulle, la rétroaction positive augmente v_{E^+} par une grandeur du même signe, et donc aussi ε (car $\varepsilon = v_{E^+} - v_{E^-}$). ε devenant alors non nul, le gain de l'AO l'amplifie et augmente à nouveau v_S dans le même sens. Ce phénomène diverge très rapidement, et ne s'arrête que lorsque v_S atteint sa valeur de saturation.

B2

$$\tau_B = \frac{3\tau}{A_d} = 0,3 \mu\text{s}$$

Ce temps est très court à l'échelle électronique, il correspond à une fréquence de l'ordre du GHz, tout juste à la limite haute des capacités d'un GBF ordinaire. Le phénomène de saturation est d'autant plus rapide que le gain de l'AO est élevé. Le régime transitoire entre deux saturations est donc tellement court que l'on peut considérer que l'AO est toujours en régime saturé.

B3

Les basculements correspondent aux instants où $\varepsilon = (v_S R_1 + v_E R_2) / (R_1 + R_2)$ change de signe, soit lorsque

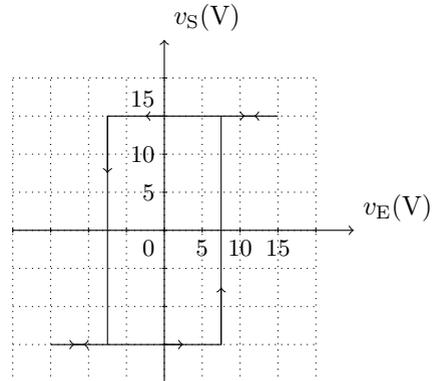
$$v_E = -v_S \frac{R_1}{R_2} = \pm V_{\text{SAT}} \frac{R_1}{R_2} = \pm \frac{V_{\text{SAT}}}{2}$$

B4

Si on part de $v_E = -V_{\text{SAT}}$, aucune valeur de v_S comprise entre $-V_{\text{SAT}}$ et V_{SAT} ne permet de rendre $\varepsilon = (v_S + 2v_E)/3$ positif. La tension différentielle d'entrée de l'AO est donc négative, comme sa sortie v_S , qui sature à $-V_{\text{SAT}}$ et qui reste ainsi tant que ε est négatif.

La tension $v_E(t)$ augmente : lorsqu'elle passe par $V_{\text{SAT}}/2$, ε s'annule et change de signe ; immédiatement, v_S sature du côté positif, à V_{SAT} . La tension d'entrée continue à s'élever jusqu'à V_{SAT} , puis redescend. Lorsque v_E passe par $-V_{\text{SAT}}/2$ à la redescente, ε change à nouveau de signe et redevient négatif ; v_S retombe alors à $-V_{\text{SAT}}$.

On appelle ce montage « comparateur » parce que sa sortie est représentative de la différence de tension entre ses deux bornes d'entrée (ici v_E et la masse). Il est non inverseur car la sortie est positive lorsque l'entrée l'est. Enfin, l'hystérésis désigne le fait qu'à un instant t la sortie dépend non seulement de la valeur de l'entrée à cet instant mais aussi de son passé : cet effet mémoire a pour conséquence l'existence de deux courbes différentes à l'aller et au retour.

**C1**

À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert. En admettant que l'AO fonctionne en régime linéaire, le courant i_- est nul et $v_{E+} = v_{E-} = 0$; en utilisant le pont diviseur de tension entre E et S on obtient :

$$\begin{aligned} v_{E-} = 0 &= v_E + (v_S - v_E) \frac{R}{R + R_P} \\ &= R_P v_E + R v_S \end{aligned}$$

soit

$$\frac{v_S}{v_E} = -\frac{R_P}{R}$$

La tension de sortie étant proportionnelle à la tension d'entrée, l'opération réalisée à basse fréquence est une **amplification**.

À fréquence élevée, le condensateur peut être vu comme un simple fil qui relie S à l'entrée inverseuse de l'AO, elle-même connectée à la masse par l'intermédiaire de l'AO fonctionnant en régime linéaire. Donc $v_S = 0$ à très haute fréquence. Par conséquent, il s'agit d'un **filtre passe-bas**.

E3A Physique et Chimie PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Alexandre Hérault (Professeur en CPGE).

Conforme au nouveau programme, ce sujet, composé de trois grandes parties indépendantes, s'intéresse à quelques aspects de l'isolation.

- Dans la première partie, on étudie l'isolation thermique d'un bâtiment, en particulier au niveau des murs. Après une étude analytique du mur simple, qui vise à redémontrer les résultats essentiels et à réintroduire la notion de résistance thermique, on s'intéresse à un mur composé de plusieurs couches en vue de le rendre beaucoup plus isolant. On termine par quelques considérations sur les transferts radiatifs et conducto-convectifs, qui modifient à la marge les résultats précédemment obtenus, et par une analyse qualitative de l'intérêt, en montagne, d'une isolation par l'intérieur ou par l'extérieur du mur.
- L'isolation phonique d'une voie de chemin de fer constitue le thème de la deuxième partie. On commence par le calcul des coefficients de transmission et de réflexion en énergie lorsqu'une onde sonore rencontre un obstacle qui peut osciller. On modélise cet obstacle par une plaque mince qui peut se déplacer sous l'influence d'une onde sonore. Après avoir validé des simplifications dans le calcul théorique, on étudie numériquement les effets d'une barrière anti-bruit.
- La dernière partie s'intéresse à la chimie de la silice, qui est le composant principal de la « laine de verre », connue pour ses propriétés d'isolation thermique. Après quelques considérations sur la structure cristallographique du silicium et de la silice, on s'intéresse à la thermodynamique des réactions de fabrication de la silice ultrapure. Cette partie se termine par une courte approche de cinétique chimique.

Ce sujet est long mais contient peu de questions difficiles et présente l'avantage d'aborder trois domaines distincts du programme. Soulignons l'importance des considérations numériques, toutes appuyées sur des exemples concrets et réalistes, ce qui en fait un problème de travail agréable.

INDICATIONS

Partie I

A4 Par définition,
$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}$$

A5 L'intensité du courant électrique est le flux du vecteur densité de courant de conduction \vec{j} à travers une section d'un conducteur.

A6 On a simplement
$$U = \frac{J_{\text{th}}}{\Delta T}$$

B2 Vérifier que les résistances thermiques correspondant à chaque partie du mur sont associées en série.

B4 Appliquer la relation analogue au diviseur de tension en électrocinétique.

C2 Utiliser à nouveau le diviseur de tension.

Partie II

E3 Écrire la forme linéarisée de l'équation d'Euler pour justifier la proportionnalité, pour une onde plane progressive harmonique, des champs de pression et de vitesse.

E5 Petite coquille dans l'énoncé : la vitesse de la paroi est selon (Ox) , pas (Oz) . Prendre en compte le fait que la paroi est à la position $x_M(t)$ et non en 0.

E7 Dériver l'expression de la vitesse (obtenue à la question E5) qui fait intervenir \underline{A}_t puis la dériver par rapport au temps pour obtenir l'accélération. Ne pas oublier que x_M dépend du temps.

E12 L'intensité est algébrique, comptée positivement dans le sens des x croissants.

F3 Pour déterminer le niveau sonore global, calculer les différentes intensités sonores puis les sommer. En effet, il n'y a pas de relation simple entre les L donnés pour les différentes octaves et L_G .

F5 Le matériau n'étant a priori pas le même, l'utilisation de la relation approchée pour \mathcal{S} n'est pas garantie. Supposer que l'on peut tout de même l'utiliser et valider a posteriori ce choix à partir de la fréquence f_0 déterminée.

Partie III

G2 La coordinence est le nombre de voisins les plus proches. Dans le cas présent, il faut considérer l'atome dans un site tétraédrique et ses quatre voisins.

H2 On rappelle que l'enthalpie libre de réaction $\Delta_r G$ est liée à l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ et au quotient de réaction Q par

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q$$

H5 La réaction [4] est la même que la réaction [2] mais considérée dans l'autre sens.

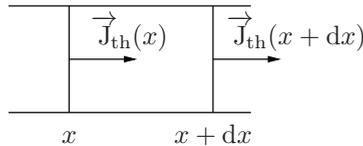
H8 Montrer que $\ln \left(\frac{2[\text{SiCl}_4]_0 - [\text{Cl}_2](t)}{2[\text{SiCl}_4]_0} \right)$ est une fonction linéaire du temps t .

H9 Déterminer la durée pendant laquelle les fluides sont chauffés (et donc la durée pendant laquelle la réaction d'oxydation peut se produire).

I. ISOLATION THERMIQUE

A. Étude du mur simple

A1 Soit une tranche de mur de section S et d'épaisseur dx . En l'absence de source thermique à l'intérieur du mur, ce système reçoit la puissance $J_{\text{th}}(x)S$ par la gauche et cède la puissance $J_{\text{th}}(x + dx)S$ par la droite.



En régime permanent, l'énergie de ce système est constante donc

$$dH = 0 = J_{\text{th}}(x)S dt - J_{\text{th}}(x + dx)S dt$$

Ainsi,
$$\frac{dJ_{\text{th}}}{dx} = 0$$

D'après la loi de Fourier
$$\vec{J}_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$$

d'où
$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = 0}$$

A2 Une double intégration de cette équation différentielle conduit, en notant A et B deux constantes d'intégration, à

$$T(x) = Ax + B$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$T(0) = T_{\text{int}} \quad \text{et} \quad T(e_B) = T_{\text{ext}}$$

ce qui donne
$$\boxed{T(x) = T_{\text{int}} - \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e_B} x}$$

On obtient un **profil linéaire de température, indépendant des caractéristiques du mur.**

A3 D'après la loi de Fourier,
$$\vec{J}_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$$

d'où
$$\boxed{\vec{J}_{\text{th}} = \lambda \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e_B} \vec{e}_x}$$

Le flux thermique est orienté selon $+\vec{e}_x$ puisque $T_{\text{int}} > T_{\text{ext}}$, ce qui est conforme au second principe de la thermodynamique (le flux thermique est naturellement orienté des sources les plus chaudes vers les plus froides).

A4 Par définition,

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}$$

Le flux étant uniforme sur toute la surface S , il vient

$$\Phi = \frac{\lambda S}{e_B} (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$$

A5 En électricité, on définit l'intensité du courant électrique par

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

où \vec{j} est le vecteur densité de courant de conduction. On peut donc faire une analogie avec le flux thermique Φ . L'analogie de la différence de température est la différence de potentiel ΔV .

$$I \text{ est analogue à } \Phi \text{ et } \Delta V \text{ à } T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}.$$

Pour avoir une analogie valide, il faut que les équations qui lient les grandeurs soient de même forme. La question précédente montre que Φ est proportionnel à $T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}$, de la même façon que I est proportionnel à ΔV dans un conducteur ohmique via la loi d'Ohm. De la même façon, on peut définir la notion de résistance hydraulique puisque le débit d'une canalisation est (souvent) proportionnel à la différence de pression entre l'entrée et la sortie. Un des intérêts de la notion de « résistance », c'est de pouvoir raisonner avec les associations usuelles en électrocinétique (série/parallèle).

Avec la définition proposée,

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{J_{\text{th}}} = \frac{e_B}{\lambda}$$

D'après l'unité de λ , on déduit que R_{th} s'exprime en $\mathbf{m^2 \cdot K \cdot W^{-1}}$.

La résistance thermique est définie par

$$r = \frac{\Delta T}{\Phi}$$

et elle s'exprime en $\mathbf{K \cdot W^{-1}}$. Il ne faut pas se laisser emporter par la dénomination « surfacique » et affecter un simple $\mathbf{m^{-2}}$. En effet, à différence de température fixée, plus la surface est grande, plus le flux thermique est grand donc plus la résistance thermique est faible.

A6 Application numérique : $J_{\text{th}} = 298 \text{ W} \cdot \mathbf{m^{-2}}$

La déperdition d'énergie est très importante avec du béton brut. Si l'on considère une maison à un seul étage (2,50 m de haut) ayant pour dimensions au sol 6 m \times 6 m, cela représente presque 18 kW de pertes thermiques pour les seuls murs latéraux ! Ce n'est évidemment pas tenable (la puissance souscrite auprès d'un fournisseur d'électricité d'un foyer qui se chauffe à l'électricité est de 12 ou 15 kW en général, rarement plus.), d'autant que cette « maison » n'offre au mieux que 36 m² de surface habitable.

CCP Physique 1 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (ENS Cachan) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Ce sujet analyse une installation frigorifique de refroidissement de l'hélium liquide. Ses cinq parties sont indépendantes.

- La première partie est consacrée au cycle thermodynamique de Claude, qui permet de refroidir l'hélium liquide. À l'aide de bilans énergétiques, on détermine le rendement de l'installation.
- L'étude d'un échangeur à contre-courant fait l'objet de la deuxième partie. On s'intéresse à la notion de résistance conducto-convective thermique, puis on modélise l'échangeur. L'énoncé s'appuie sur des notions de thermodynamique telles que la diffusion thermique.
- La troisième partie concerne l'écoulement de l'hélium liquide dans une conduite cylindrique. On y utilise des raisonnements simples de mécanique des fluides faisant intervenir la perte de charge, les débits volumique et massique,...
- La quatrième partie aborde une méthode de refroidissement de l'hélium liquide par pompage de la vapeur. En partant de la formule de Clapeyron, on détermine la puissance thermique prélevée au liquide ainsi que la masse liquide perdue par évaporation.
- Pour finir, dans la cinquième partie, on s'intéresse à différentes méthodes de contrôle de paramètres tels que la température, la pression, la vitesse d'écoulement et la hauteur de liquide. Cette partie utilise de nombreuses notions d'hydrostatique, d'électrocinétique et de mécanique du point.

De longueur raisonnable pour une épreuve CCP, ce sujet présente cependant une difficulté : les parties compliquées se situent en début d'énoncé. Il faut vous habituer à lire en entier les sujets pour traiter d'abord les parties où vous vous sentez à l'aise. D'ailleurs, beaucoup de résultats intermédiaires sont donnés, ce qui permet d'avancer sans même avoir répondu à toutes les questions.

Vous pouvez utiliser ce sujet pour réviser la thermodynamique (bilans énergétiques, diffusion thermique) et l'électrocinétique. Toutes ses questions sont conformes au nouveau programme.

INDICATIONS

A.1.2 Par définition,
$$D_m = \frac{dm}{dt}$$

A.2.1 Utiliser la conservation du débit massique.

A.2.2 Déterminer les enthalpies $D_{m_i} h_i$ entrante et sortante. En outre, les puissances reçues par le système sont $-\mathcal{P}_{T_1}$ et $-\mathcal{P}_{T_2}$.

A.2.3 L'enthalpie massique h n'est pas une grandeur extensive alors que $D_m h$ l'est.

A.2.9 Le titre en liquide s'écrit $x_\ell = D_{m_\ell}/D_{m_7}$. Introduire ensuite le taux de liquéfaction y dans l'expression de x_ℓ .

A.2.12 Par un bilan énergétique au niveau du compresseur, déterminer la puissance du compresseur sans apport extérieur d'énergie.

B.1.3 Utiliser le fait que Φ_{Th} est constant.

B.1.6 Le transfert thermique se fait réellement du fluide 1 vers le solide donc le solide reçoit du fluide 1

$$\Phi_{Th} = -h_{C_1} (T_{S_1} - T_1) 2\pi R_1 L$$

B.1.7 Introduire tous les flux avec la relation

$$T_1 - T_2 = T_1 - T_{S_1} + T_{S_1} - T_{S_2} + T_{S_2} - T_2$$

B.2.1 La différence de température est $T_1(0) - T_1(x)$ pour le fluide 1 et $T_2(0) - T_2(x)$ pour le fluide 2.

C.3 Ajouter la pression hydrostatique.

C.4 Utiliser une analogie électrique.

D.5 Le nombre de particules aspirées par unité de temps est donné par

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{Th}}{L_v}$$

D.7 Écrire le premier principe en considérant que l'énergie reçue est $dm L_v$.

D.8 Résoudre avec la méthode de séparation des variables.

E.2.1 Prendre le logarithme de l'expression puis la différentier.

E.3.1 Le fluide possède une vitesse $v_m \cos \varphi$ de A vers B.

E.3.2 Le fluide possède une vitesse $-v_m \cos \varphi$ de B vers A.

E.4.2 La résistivité électrique et la conductivité électrique sont reliées par $\rho_{el} = \frac{1}{\gamma_{el}}$.

A.1.1 Dans le bilan énergétique, on a pour le système constitué de la masse dm :

- δW_u , le travail reçu autre que le travail de transvasement, appelé « travail utile » ;
- δQ , l'énergie thermique reçue ;
- $h dm$, l'enthalpie ;
- $dm \frac{c^2}{2}$, l'énergie cinétique ;
- $z dm g$, l'énergie potentielle de pesanteur.

A.1.2 Par définition, $\delta W_u = \mathcal{P}_W dt$ et $\delta Q = \mathcal{P}_Q dt$ où \mathcal{P}_W est la puissance mécanique utile reçue par le fluide et \mathcal{P}_Q la puissance thermique reçue. De même, le débit massique est défini par

$$D_m = \frac{dm}{dt}$$

Le bilan énergétique se réécrit

$$D_m \left[\left(h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + g z_2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + g z_1 \right) \right] = \mathcal{P}_W + \mathcal{P}_Q$$

A.2.1 Au point de repère 14, le débit massique est de nouveau D_m . La conservation du débit massique impose

$$D_{m_{13}} + D_{m_\ell} = D_m$$

d'où

$$D_{m_{13}} = D_m - D_{m_\ell}$$

A.2.2 Le système reçoit $-\mathcal{P}_{T_1} - \mathcal{P}_{T_2}$. En négligeant les variations d'énergies cinétique et potentielle de pesanteur, le premier principe s'écrit

$$D_{m_{13}} h_{13} + D_{m_\ell} h_{\text{liq}} - D_m h_1 = -\mathcal{P}_{T_1} - \mathcal{P}_{T_2}$$

Avec l'expression de la question A.2.1, on arrive à

$$D_m (h_{13} - h_1) + D_{m_\ell} (h_{\text{liq}} - h_{13}) = -\mathcal{P}_{T_1} - \mathcal{P}_{T_2}$$

A.2.3 De même, le premier principe appliqué à la turbine 1 donne

$$D_{m_{11}} h_{11} - D_{m_{12}} h_{12} = -\mathcal{P}_{T_1}$$

Or $D_{m_{11}} = D_{m_{12}} = x_1 D_m$ et $h_{12} = h_2$. Ainsi,

$$x_1 D_m (h_{11} - h_2) = -\mathcal{P}_{T_1}$$

L'enthalpie est une grandeur extensive mais l'enthalpie massique h ne l'est pas car cette dernière est le rapport de deux grandeurs extensives.

A.2.4 Le bilan énergétique sur la turbine 2 s'écrit

$$D_{m_9} h_9 - D_{m_{10}} h_{10} = -\mathcal{P}_{T_2}$$

Or $h_{10} = h_4$ et $D_{m_9} = D_{m_{10}} = x_2 (1 - x_1) D_m$, donc

$$D_m x_2 (1 - x_1) (h_9 - h_4) = -\mathcal{P}_{T_2}$$

A.2.5 Remplaçons les expressions de \mathcal{P}_{T_1} et de \mathcal{P}_{T_2} des questions précédentes dans la relation obtenue à la question A.2.2 :

$$D_m(h_{13} - h_1) + D_{m_\ell}(h_{\text{liq}} - h_{13}) = x_1 D_m(h_{11} - h_2) + x_2(1 - x_1) D_m(h_9 - h_4)$$

ce qui se réécrit en introduisant $y = D_{m_\ell}/D_m$

$$(h_{13} - h_1) + y(h_{\text{liq}} - h_{13}) = x_1(h_{11} - h_2) + x_2(1 - x_1)(h_9 - h_4)$$

d'où

$$y = \frac{x_1(h_{11} - h_2) + x_2(1 - x_1)(h_9 - h_4) + h_1 - h_{13}}{h_{\text{liq}} - h_{13}}$$

A.2.6 Au niveau du premier échangeur, il n'y a ni transfert thermique ni travail. Le premier principe impose donc

$$D_m(h_2 - h_1) + D_{m_{13}}(h_{13} - h_{12}) = 0$$

Or $D_{m_{13}} = D_m - D_{m_\ell}$ d'après la question A.2.1. L'expression précédente se réécrit

$$D_{m_\ell} = D_m \frac{h_2 - h_1 + h_{13} - h_{12}}{h_{13} - h_{12}}$$

Ainsi,

$$D_{m_\ell} = D_m \left(1 + \frac{h_2 - h_1}{h_{13} - h_{12}} \right)$$

ce qui donne

$$y = 1 + \frac{h_2 - h_1}{h_{13} - h_{12}} = 4,65 \times 10^{-2}$$

A.2.7 De même, sur le deuxième échangeur,

$$D_m(1 - x_1)(h_3 - h_2) + D_{m_{13}}(h_{12} - h_{11}) = 0$$

Avec l'expression de $D_{m_{13}}$ tirée de la question A.2.1, on a

$$x_1 D_m(h_3 - h_2) = D_m(h_3 - h_2) + (D_m - D_{m_\ell})(h_{12} - h_{11})$$

donc

$$x_1 = 1 + (1 - y) \frac{h_{12} - h_{11}}{h_3 - h_2} = 9,97 \cdot 10^{-2}$$

A.2.8 Appliquons le bilan énergétique sur le quatrième échangeur pour faire apparaître x_2 :

$$D_{m_4}(h_5 - h_4) + D_{m_{9'}}(h_{10} - h_9) = 0$$

avec $D_{m_{9'}}$ le débit massique entrant dans l'échangeur au point de repère 9. On a $D_{m_4} = (1 - x_1)(1 - x_2)D_m$; déterminons l'expression de $D_{m_{9'}}$.

Par conservation du débit au niveau de l'intersection du deuxième échangeur,

$$D_{m_{12}} = D_{m_{9'}} + D_{m_{11}}$$

avec $D_{m_{12}} = D_{m_{13}}$ et $D_{m_{11}} = x_1 D_m$. La conservation du débit se réécrit

$$x_1 D_m + D_{m_{9'}} = D_{m_{13}} = D_m - D_{m_\ell}$$

d'où

$$D_{m_{9'}} = (1 - x_1)D_m - D_{m_\ell}$$

Le bilan énergétique donne alors

$$(1 - x_1)(1 - x_2)D_m(h_5 - h_4) + [(1 - x_1)D_m - D_{m_\ell}](h_{10} - h_9) = 0$$

CCP Physique 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christelle Serba (ENS Lyon) et Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) ; il a été relu par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE), Alexandre Hérault (Professeur en CPGE), Nicolas Bruot (ENS Cachan) et Julien Dumont (Professeur en CPGE).

La partie chimie porte sur les propriétés du cuivre.

- La première sous-partie porte sur la structure cristalline du cuivre, ce qui mène à la détermination de sa masse molaire.
- Les propriétés oxydo-réductrices du cuivre sont ensuite étudiées à travers l'établissement de son diagramme potentiel-pH et de celui de l'eau.
- Dans la quatrième sous-partie, l'étude de la lixiviation du cuivre repose sur la chimie des solutions.
- Enfin, dans la cinquième sous-partie, on détermine la composition d'une céramique supraconductrice $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_n$ grâce à des réactions d'oxydo-réduction et de dosage.

Il s'agit d'un sujet proche du programme et bien détaillé. Il est en accord avec les programmes en vigueur depuis la rentrée 2014/2015.

La partie physique aborde la création d'un champ magnétique intense à l'aide d'un solénoïde. Afin de calculer la puissance thermique dissipée par celui-ci, trois cas sont étudiés.

- Dans une première partie, après quelques rappels sur le lien entre résistance et résistivité, on étudie une bobine en cuivre à température normale avant d'étudier la même bobine refroidie à 77 K, température d'ébullition de l'azote liquide. Puisque la résistivité d'un métal classique diminue avec la température, on s'attend à diminuer l'échauffement de la bobine en la refroidissant.
- Ensuite, on s'intéresse à l'échauffement d'un supraconducteur parcouru par un courant. Il n'y a pas de dégagement de chaleur lorsque ce dernier est constant, mais en régime transitoire le comportement est tout à fait différent.
- Enfin, la dernière partie traite de la stabilité du supraconducteur, qui doit rester au-dessous de sa température critique pour garder ses propriétés.

Utilisant des notions de base d'électricité, de magnétostatique, de thermodynamique et de diffusion de chaleur, la partie de physique est très abordable.

INDICATIONS

Chimie

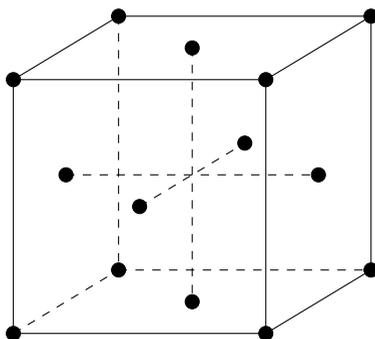
- 6 Déterminer la masse volumique ρ en utilisant la relation trouvée à la question 3.
- 13 Discuter la stabilité des ions Cu^+ .
- 14 Déterminer tout d'abord l'enthalpie libre standard de réaction.
- 15 Faire appel au pH d'intersection déterminé à la question 13.
- 24 Ne pas essayer de simplifier la relation obtenue.
- 25 Déterminer la concentration correspondant à $\text{pH}=4$. Il est alors possible de simplifier l'expression de C .
- 29 Les ions Cu(III) et Cu(II) sont réduits en Cu(I) par les ions iodure.
- 31 Dans chaque cas, à chaud et à froid, déterminer une relation entre x , y , $[\text{S}_2\text{O}_3^{2-}]$ et $V_{\text{iéq}}$. Puis rassembler les deux équations obtenues en éliminant $[\text{S}_2\text{O}_3^{2-}]$.
- 32 La formule brute est globalement neutre. Utiliser la réponse à la question 31.

Physique

- 33 Il s'agit de la loi d'Ohm locale.
- 34 Utiliser les relations intégrales entre courant et densité de courant puis entre tension et champ électrique.
- 36.a Exprimer tout d'abord la longueur d'une seule spire.
- 38.a Multiplier le nombre de spires se trouvant sur la longueur L sur p couches par la longueur d'une spire (périmètre d'un cercle).
- 39.a Utiliser le résultat de la question 35.
- 39.b La puissance électrique dissipée par une résistance vaut RI^2 .
- 40.a Reprendre l'expression du champ magnétique de la question 37.a.
- 41.a Appliquer les principes de la thermodynamique à une machine thermique diatherme réversible. L'efficacité d'une machine frigorifique est définie par la chaleur reçue de la source froide divisée par le travail reçu de l'extérieur.
- 43 La valeur critique du courant est obtenue lorsque ce dernier est réparti sur toute la section du supraconducteur.
- 45.a Seule la portion de conducteur située entre r_1 et R est traversée par du courant. Évaluer la surface correspondante, qui est la différence entre deux disques.
- 46.b Utiliser les symétries et invariances démontrées à la question précédente pour déterminer que le contour d'Ampère est un cercle de rayon r .
- 47.b Simplifier l'équation de Maxwell-Faraday à l'aide du formulaire et des considérations de symétrie et d'invariance.
- 47.c De même, à partir de l'équation de Maxwell-Faraday simplifiée, réutiliser l'expression du champ magnétique de la question 46.c puis intégrer l'équation.
- 50 Le formulaire en fin d'énoncé donne la primitive voulue.
- 51.a Utiliser le formulaire fourni en fin d'énoncé.
- 54 En régime permanent, ce qui sort d'un volume infinitésimal compense ce qui entre ou ce qui est créé dans celui-ci.
- 56 Résoudre l'équation de diffusion unidimensionnelle.
- 60.a Une zone normale sera capable de se résorber si elle évacue suffisamment de chaleur. Comparer alors les deux flux calculés précédemment.

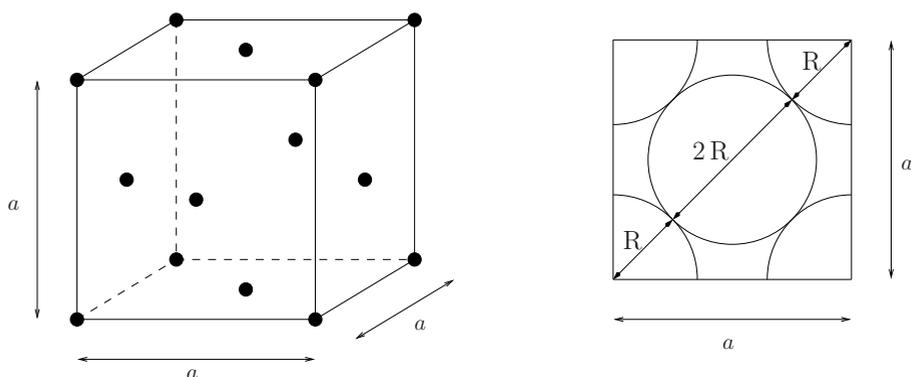
PARTIE CHIMIE

1 L'allure de la maille élémentaire d'une structure cubique à faces centrées est :



2 La coordinnence est le nombre de plus proches voisins au sein d'une structure cristalline. Une structure cubique à faces centrées étant compacte, **la coordinnence est de 12**.

3 Le contact entre les atomes s'effectue le long de la diagonale d'une face.



Le rayon R et le paramètre de maille a sont alors reliés par

$$4R = a\sqrt{2}$$

4 Dans une maille, il y a 8 atomes aux sommets et 6 sur les faces, ce qui revient à $8/8 + 6/2 = 4$ **atomes par maille**.

5 Dans le modèle des sphères dures, la compacité est le rapport entre le volume occupé par les sphères et le volume de la maille. Il se définit donc par

$$C = \frac{V_{\text{occupé}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4V_{\text{sphère}}}{a^3} = 4 \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{a^3}$$

Comme $a = \frac{4R}{\sqrt{2}}$,

$$C = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 0,74$$

Il s'agit d'une **structure compacte**, la compacité est maximale.

| L'autre structure compacte est l'hexagonale compacte.

6 Déterminons la masse volumique ρ du cuivre :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4M}{\mathcal{N}_A a^3}$$

Comme $a = \frac{4R}{\sqrt{2}}$,

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{M}{\mathcal{N}_A R^3}$$

7 D'après la question précédente en prenant $\rho = 8,9 \cdot 10^6 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$, la masse molaire M du cuivre se déduit par

$$M = \frac{8}{\sqrt{2}} \rho \mathcal{N}_A R^3 = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Déterminons dans quelle période se trouve le cuivre en étudiant la famille des gaz rares et en estimant leur masse molaire. Il est possible d'écrire leur configuration électronique dans leur état fondamental, puis d'en déduire leur numéro atomique. Le nombre de masse de l'isotope le plus stable peut être approximé au double du numéro atomique. Par définition de la mole, le carbone ($Z = 6$, $A = 12$) a une masse molaire de $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. La valeur de la masse molaire du gaz rare peut alors être approximé à son nombre de masse A .

Période	Configuration électronique du gaz rare	Z	$A \approx 2Z$	M ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)
1 ^{re}	$1s^2$	2	4	4
2 ^e	$1s^2 2s^2 2p^6$	10	20	20
3 ^e	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$	18	36	36
4 ^e	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6$	36	72	72

Le cuivre ($M = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) se trouve donc dans la **4^e période** de la classification des éléments.

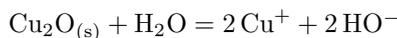
Il est également possible d'approximer le numéro atomique du cuivre à partir de sa masse molaire, soit $Z \approx 32$ (en réalité, $Z = 29$), puis d'en déduire une configuration électronique qui confirme l'appartenance du cuivre à la 4^e période.

8 Classons les espèces par degré d'oxydation :

- Degré d'oxydation **0** : $\text{Cu}_{(s)}$.
- Degré d'oxydation **I** : Cu^+ , $\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$.
- Degré d'oxydation **II** : Cu^{2+} , $\text{Cu}(\text{OH})_{2(s)}$.

Déterminons maintenant les domaines de prédominance de chacune des espèces dans chaque classe d'oxydation.

- **Degré d'oxydation 0** : il n'y a qu'une seule espèce, $\text{Cu}_{(s)}$.
- **Degré d'oxydation I** : les espèces Cu^+ et $\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$ sont reliées par l'équation



de $\text{p}K_{s1} = 30$. Utilisons la constante d'équilibre de cette réaction pour déterminer le pH délimitant les domaines de prédominance sachant que, par hypothèse, la concentration totale en espèces dissoutes est $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

$$K_{s1} = [\text{Cu}^+]^2 [\text{HO}^-]^2$$

Mines Physique 1 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Cette épreuve étudie quelques propriétés d'un tore à travers quatre exercices indépendants.

- Le premier exercice étudie sommairement le « fonctionnement » d'un hula hoop. Les premières questions visent à obtenir l'expression du moment d'inertie du tore autour d'un axe. Seules les deux dernières questions concernent l'étude dynamique proprement dite. Cet exercice n'est pas spécialement difficile mais il est désormais hors programme.
- Le deuxième exercice vise à exprimer la résistance d'un conducteur ohmique ayant la géométrie d'un tore. À partir des équations de Maxwell, on redémontre la neutralité d'un conducteur puis on résout l'équation de Laplace qui régit le potentiel électrique, ce qui permet d'établir la loi d'Ohm dans cette géométrie. Très détaillée, la démarche proposée est analogue à celle qui a été effectuée en cours pour un conducteur cylindrique.
- Dans le troisième exercice, on étudie une pince ampèremétrique. Ce dispositif permet, par induction, de mesurer un courant d'intensité importante circulant dans un fil. Un des avantages de ce dispositif est qu'il n'y a pas besoin d'ouvrir le circuit pour insérer l'instrument de mesure, comme on doit le faire pour utiliser un ampèremètre. Le calcul est conduit en passant par la détermination du flux du champ magnétique à travers le tore. On termine en précisant les conditions de fonctionnement d'une telle pince grâce à l'étude de sa fonction de transfert.
- La quatrième partie s'appuie essentiellement sur le TP-cours de l'étude du ferromagnétisme. Il s'agit d'étudier le montage expérimental, qui fait notamment intervenir un montage intégrateur, afin d'accéder à la détermination expérimentale du cycle d'hystérésis.

L'ensemble n'est pas très difficile et reste proche du cours, ce qui en fait un bon sujet de travail au cours de l'année. À l'exception de la mécanique du solide, l'ensemble des points abordés dans cette épreuve figure toujours au programme en vigueur à partir de la rentrée 2014. Seul un changement de terminologie doit être apporté puisque l'on ne parle plus d'amplificateur opérationnel mais d'amplificateur linéaire intégré (ALI).

INDICATIONS

Partie I

- 2 Le tore peut être vu comme un cylindre « évidé », c'est-à-dire que l'on peut voir un « grand » cylindre comme un « petit » cylindre plus un tore, ce qui permet de trouver J à partir de la question 1.
- 4 Appliquer le théorème de la résultante dynamique au tore. Supposer le mouvement du tore horizontal et remarquer que G a un mouvement circulaire uniforme.
- 5 Seule la force d'adhérence a une puissance non nulle. Sans hypothèse supplémentaire sur A , on ne peut pas intégrer l'équation différentielle qui régit l'évolution de Ω mais on peut interpréter $\frac{d\Omega}{dt}$.

Partie II

- 9 En régime permanent, l'équation de Maxwell-Faraday permet d'introduire le potentiel électrique. Utiliser également l'équation de Maxwell-Gauss (avec $\rho = 0$).
- 11 L'intensité I qui traverse une section droite Σ d'un conducteur est

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Partie III

- 14 Supposer que le nombre N de spires est grand. Les sources du champ magnétique sont le courant i_1 dans le tore et le courant i dans le fil. Une étude des symétries et invariances conduit à $\vec{B} = B(r, z, t)\widehat{u}_\theta$. Appliquer ensuite le théorème d'Ampère et vérifier que la composante orthoradiale du champ ne dépend pas de z . Si les courants i_1 et i dépendent du temps, le champ magnétique en dépend.
- 15 Le flux à travers le bobinage est égal à N fois le flux à travers une spire.
- 17 Écrire l'équation électrique soit en considérant des inductances L et M en série avec une résistance R_p , soit en utilisant la loi de Faraday pour déterminer la f.é.m. totale du circuit qui est alors uniquement constitué de la résistance R_p .
- 18 Le principe de la mesure est de mesurer i_1 et d'en déduire i . Il faut donc que la relation liant ces deux grandeurs soit linéaire et indépendante de la forme du signal (notamment de sa pulsation).

Partie IV

- 20 C'est l'aimantation M qui sature. Le champ magnétique croît toujours, même s'il atteint une asymptote de pente très faible ; il faut donc comprendre l'expression maladroite de l'énoncé « le champ magnétique de saturation » comme « le champ magnétique une fois que le matériau a saturé ».
- 24 L'expression du travail reçu pour une évolution élémentaire est $\delta W = H dB$.

DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE

I. MODÉLISATION D'UN HULAHOOP

1 Par définition, le moment d'inertie d'un solide \mathcal{S} autour d'un axe Δ est

$$J = \int_{M \in \mathcal{S}} r^2 dm$$

où r désigne la distance entre l'axe Δ et le point M . Si \mathcal{S} peut être décrit comme deux solides *disjoints* \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , l'intégrale sur \mathcal{S} est la somme des deux intégrales sur \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 :

$$J_{\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2} = \int_{M \in \mathcal{S}_1} r^2 dm + \int_{M \in \mathcal{S}_2} r^2 dm$$

2 Le moment d'inertie d'un cylindre de hauteur c , de rayon b et de masse M_b est, d'après l'indication de l'énoncé,

$$J_b = \frac{1}{2} M_b b^2$$

Quant à celui d'un cylindre de hauteur c , de rayon a et de masse M_a , c'est

$$J_a = \frac{1}{2} M_a a^2$$

D'après la question précédente, on peut écrire

$$J_b = J_a + J$$

Il ne reste qu'à exprimer les masses des deux cylindres

$$M_a = \mu \pi c a^2 \quad \text{et} \quad M_b = \mu \pi c b^2$$

donc

$$J = \frac{1}{2} \mu \pi c (b^4 - a^4)$$

On pouvait faire un calcul direct à partir de la définition du moment d'inertie

$$J = \int_{z=0}^c \int_{r=a}^b r^2 dm = \int_{z=0}^c \int_{r=a}^b r^2 (2\pi\mu r dr dz) = 2\pi\mu c \int_{r=a}^b r^3 dr$$

Cela conduit bien au même résultat.

3 Le roulement sans glissement peut se traduire formellement par la relation suivante au point de contact I entre l'arbre et le tore :

$$\vec{v}(I \in \text{tore}) = \vec{v}(I \in \text{arbre})$$

Or, l'arbre étant fixe dans le référentiel \mathcal{R}_0 , $\vec{v}(I \in \text{arbre}) = \vec{0}$. En utilisant par ailleurs la relation de cinématique pour un solide dont le vecteur rotation est $\vec{\Omega}$,

$$\vec{v}(I \in \text{tore}) = \vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GI}$$

il vient
$$\vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

Or,
$$\begin{cases} \vec{v}(G) = OG \dot{\theta} \widehat{u}_\theta = (a-r) \dot{\theta} \widehat{u}_\theta \\ \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = (\Omega \widehat{u}_z) \wedge (-a \widehat{u}_r) = -a \Omega \widehat{u}_\theta \end{cases}$$

Finalement,
$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{a}{a-r} \Omega}$$

D'après le théorème de König, l'énergie cinétique du tore de masse

$$m = \pi \mu c (b^2 - a^2)$$

est la somme de deux termes :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2 + \mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} \pi \mu c (b^2 - a^2) [(a-r) \dot{\theta}]^2 + \mathcal{E}_c^*$$

où \mathcal{E}_c^* est l'énergie cinétique barycentrique, qui s'écrit, dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe,

$$\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} J \Omega^2 = \frac{1}{2} \mu \pi c (b^2 - a^2) \frac{a^2 + b^2}{2} \Omega^2$$

En remplaçant $(a-r)\dot{\theta}$ par $a\Omega$, on obtient bien

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_0 \Omega^2 \quad \text{avec} \quad J_0 = \pi \mu c (b^2 - a^2) \frac{3a^2 + b^2}{2}}$$

4 Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , le tore est soumis à

- son poids $-m g \widehat{u}_z$;
- une force de contact au niveau de l'arbre : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$; la force \vec{N} est la réaction normale et la force \vec{T} , qui traduit les frottements solides, est opposée à la vitesse de glissement.

Ce sont les lois de Coulomb qui régissent les frottements solides. La partie tangentielle traduit les frottements. Elle est nulle en l'absence de frottement et est opposée à la vitesse de glissement réelle (cas où il y a glissement) ou supposée (cas où il n'y a pas glissement, comme dans le roulement sans glissement). S'il y a glissement, sa norme est telle que

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$$

où f_d est le coefficient de frottement *dynamique*. En l'absence de glissement, on a

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$$

avec f_s le coefficient de frottement *statique*. On a toujours $f_s \geq f_d$.

Compte tenu de la géométrie, on peut écrire a priori, $\vec{N} = N_r \widehat{u}_r$ et $\vec{T} = T_\theta \widehat{u}_\theta + T_z \widehat{u}_z$. Le théorème de la résultante dynamique s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = -m g \widehat{u}_z + N \widehat{u}_r + T_\theta \widehat{u}_\theta + T_z \widehat{u}_z \quad (*)$$

Mines Physique 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Ce sujet, composé de trois parties indépendantes, porte sur le magnétisme.

- Dans la première partie, on énonce rapidement les formules de base de l'électrostatique et de la magnétostatique telles que la force de Coulomb et la loi de Biot et Savart.
- La deuxième partie s'intéresse à la méthode de la « boussole des tangentes » pour étudier la déviation d'une boussole placée dans un champ qui est la superposition du champ magnétique terrestre et de celui créé par un fil infini. On commence par calculer le champ magnétique d'un fil infini puis on introduit le moment magnétique de la boussole. Ensuite, le calcul du couple subi par l'aiguille aimantée permet d'étudier la rotation de la boussole grâce au théorème du moment cinétique. Cette partie permet de réviser les calculs de base de magnétostatique ainsi que les calculs de couple magnétique.
- L'étude d'un dispositif de lévitation magnétique est abordée dans la troisième et dernière partie. On commence par faire une étude mécanique d'un anneau lesté, puis on calcule le champ magnétique créé par la couronne circulaire et on étudie la stabilité de cette lévitation. Enfin, on termine par quelques questions sur un dispositif électrique de stabilisation. Cette partie requiert des raisonnements énergétiques ainsi que ceux habituels sur les amplificateurs opérationnels.

L'épreuve fait appel à de nombreux outils relatifs au magnétisme : calcul de champ magnétique, notion de moment magnétique, expression de l'énergie potentielle et du couple subi dans un champ magnétique extérieur. Cette épreuve alterne des questions difficiles (calcul du couple subi par la boussole), qui demandent une bonne vision du phénomène, et d'autres proches du cours (calcul de champ, amplificateur opérationnel). Peu de résultats intermédiaires sont donnés ; toutefois, le sujet comporte suffisamment de passages indépendants pour qu'il soit toujours possible de progresser.

Attention, les questions portant sur la mécanique du solide et la loi de Biot et Savart ne peuvent plus être traitées dans le cadre du programme ayant cours depuis la rentrée 2014.

INDICATIONS

Partie II

- 10 Le champ magnétique $\vec{B}(P)$ n'est pas dirigé simplement : projeter le vecteur de la base polaire \hat{e}_θ dans le plan cartésien en introduisant dans le plan (Oxy) un angle θ pris entre \vec{OP} et \hat{e}_x tel que

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- 11 Utiliser la relation $d\mu = \mu_\gamma dV = \mu \frac{dV}{V_{\text{tot}}}$

sans chercher à détailler l'expression réelle de dV .

- 12 Introduire le rayon du cylindre ε pour pouvoir écrire le volume simplement.
13 Écrire le théorème du moment cinétique projeté selon (Oy) .

Partie III

- 17 Avec $\vec{v}_O = 0$, utiliser la relation de cinématique du solide pour en déduire \vec{v}_G .
21 Écrire B_z en fonction de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ puis identifier le terme $2\eta - 1$ dans l'expression de B_z . Vérifier ensuite en partant de Ψ que l'on retrouve bien la formule du champ magnétique.
25 L'énergie potentielle est $E_{p,m} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.
26 Autour de $z = z_e$, le développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle donne

$$E_p(z) = E_p(z_e) + (z - z_e) \left. \frac{dE_p}{dz} \right|_{z=z_e} + \frac{1}{2} (z - z_e)^2 \left. \frac{d^2E_p}{dz^2} \right|_{z=z_e}$$

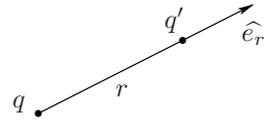
avec $\left. \frac{dE_p}{dz} \right|_{z=z_e} = 0$ car l'on a un équilibre.

- 28 Les deux termes restants du laplacien peuvent-ils avoir les mêmes signes ?
29 Donner la fonction affine en respectant les conditions

$$u_{H_1}(x_{H_1}) = u_{H_{1,m}} \quad \text{et} \quad u_{H_2}(x_{H_2}) = u_{H_{2,m}}$$

1 La force exercée par une charge q sur une autre charge q' distantes de r s'écrit

$$\vec{F} = \frac{q q'}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{e}_r$$



avec \hat{e}_r le vecteur unitaire partant de la charge q dirigé vers la charge q' . **Il s'agit de la force de Coulomb établie en 1785.**

Déterminons les unités des grandeurs intervenant dans cette loi. Pour cela, utilisons des formules liant ces paramètres à des grandeurs ayant des unités simples :

- q est la **charge électrique en coulombs (C)** ;
- r est une **distance exprimée en mètres (m)** ;
- pour déterminer les unités de ε_0 , prenons la formule de la capacité C d'un condensateur plan d'épaisseur e et de surface S , c'est-à-dire $C = \varepsilon_0 S/e$ avec C en farads (F). Ainsi ε_0 est en **F.m⁻¹**.

2 Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on arrive à

$$F_e = 2.10^{-8} \text{ N}$$

La force gravitationnelle s'écrit en norme $F_g = \frac{G m m'}{r^2}$, d'où

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{q q'}{4\pi \varepsilon_0 G m m'} = 3.10^{42} \gg 1$$

La force gravitationnelle est donc négligeable devant la force électrostatique. De même,

$$\frac{F_e}{P} = \frac{q q'}{4\pi \varepsilon_0 r^2 m g} = 2.10^{21} \gg 1$$

Le poids est aussi négligeable par rapport à la force électrostatique. Ainsi, **Seule l'interaction électrostatique est à prendre en compte.**

3 Dans le champ électrostatique \vec{E} créé par la charge q , la charge q' subit la force

$$\vec{F} = q' \vec{E}$$

En comparant cette expression à celle de la question 1, on a

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{e}_r$$

Un champ électrique dérive d'un potentiel donc \vec{E} est en **V.m⁻¹**.

Les propriétés du vecteur polaire \vec{E} reposent sur le **principe de Curie** :

- **tout plan de symétrie des charges est plan de symétrie du champ électrostatique ;**
- **tout plan d'antisymétrie de la distribution de charge est plan d'antisymétrie du champ électrostatique.**

4 Le champ magnétostatique $d\vec{B}$ suit la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (d\vec{\ell} \wedge \hat{e}_{PM})$$

Déterminons les unités de μ_0 . Utilisons l'énergie d'une bobine qui est proportionnelle à $L i^2$ avec L l'inductance en henrys (H). De plus, d'après l'électromagnétisme, B^2/μ_0 est homogène à une énergie volumique donc

$$\mu_0 \text{ est en } \text{H.m}^{-1}.$$

\vec{B} étant un vecteur axial :

- tout plan de symétrie de la distribution de courant est plan d'antisymétrie du champ magnétostatique ;
- tout plan d'antisymétrie de la distribution de courant est plan de symétrie du champ magnétostatique.

5 La force subie par une portion élémentaire parcourue par un courant d'intensité I suit la loi de Laplace :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

6 Le théorème d'Ampère s'énonce comme suit : Soit un contour \mathcal{C} (\mathcal{C} est fermé). La circulation du champ magnétique le long du contour \mathcal{C} , orienté, s'écrit

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

$I_{\text{enlacé}}$ est l'intensité algébrique qui traverse toute surface orientée, s'appuyant sur \mathcal{C} .

7 Tout plan passant par l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan. Par conséquent,

$$\vec{B}(M) = B(M) \hat{e}_\theta$$

De plus, le système est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon (Oz). Ainsi,

$$\vec{B}(M) = B(\rho) \hat{e}_\theta$$

Soit \mathcal{C} le cercle de rayon ρ centré sur l'axe (Oz). D'après le théorème d'Ampère,

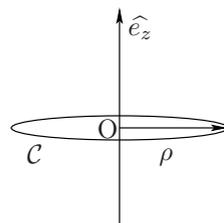
$$B(\rho) 2\pi \rho = \mu_0 I$$

donc

$$\vec{B}_\infty(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{e}_\theta$$

8 Pour un fil fini, le circuit est non fermé, donc

Le théorème d'Ampère ne peut pas être utilisé.



Mines Chimie PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Hérault (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Comme c'est généralement l'usage pour l'épreuve de chimie de la filière PSI du concours Mines-Ponts, ce sujet s'intéresse à un élément chimique. Cette année, l'étude porte sur le vanadium. L'épreuve comporte cinq petites parties. Sauf à de rares exceptions à l'intérieur d'une même partie, les questions sont indépendantes les unes des autres.

- La première partie traite de structure électronique et de cristallographie. L'habituelle question sur les règles de remplissage des électrons démarre le sujet. Le numéro atomique du vanadium n'est pas donné et l'on utilise la position de l'élément dans la classification périodique pour en déduire la structure électronique. En ce qui concerne la cristallographie, on précise un contact dans un réseau cubique centré et on écrit la maille d'une structure ionique de type NaCl.
- La deuxième partie s'intéresse au diagramme potentiel-pH du vanadium. On commence bien sûr par attribuer les espèces dans les domaines du diagramme. Puis les questions sont variées et nécessitent d'utiliser à bon escient les différentes frontières du tracé pour déterminer la concentration de tracé, le produit de solubilité d'un hydroxyde et un potentiel standard d'oxydoréduction.
- La troisième partie est la plus délicate. Elle concerne les batteries rechargeables à flux de vanadium. Les deux premières questions, très simples, concernent l'établissement de l'équation de réaction de la décharge de la pile ainsi que sa force électromotrice. Puis l'on s'intéresse à la cinétique de cette réaction réalisée en milieu ouvert puisque la pile est un réacteur ouvert parfaitement agité.
- La quatrième partie concerne le titrage rédox d'une espèce du vanadium par les ions permanganate. Les questions sont très classiques et ne présentent pas de difficulté particulière : on établit l'équation du dosage, sa constante d'équilibre et on utilise le volume équivalent pour déterminer la concentration cherchée.
- La cinquième et dernière partie concerne la bromation d'un alcène catalysée par le vanadate d'ammonium. La réaction centrale de cette partie, la bromation d'un alcène, est hors programme depuis la rentrée 2014. On peut cependant traiter les questions en sachant que le composé demandé à la question 20 est en fait le dibrome Br_2 . Cette partie est assez difficile, l'énoncé ne donnant pas le produit de réduction du vanadium.

Au final, cette épreuve est assez courte. Elle peut être traitée dans son intégralité dans le temps imparti, soit seulement 1h30. À l'exception d'une ou deux questions de cinétique en milieu ouvert, les questions posées sont très classiques et surtout parfaitement représentatives de ce qui est attendu des candidats de la filière PSI, pour lesquels la chimie n'est évidemment pas la matière principale – mais néanmoins l'une des plus rémunératrices, quand le cours est appris et compris. Ce sujet constitue de ce fait un excellent entraînement pour les sessions futures, les thèmes abordés d'une année sur l'autre dans cette épreuve étant souvent très proches.

INDICATIONS

Partie A

- 1 La position de V dans la classification donne n_{\max} et le nombre d'électrons de valence. L'élément en dessous a le même nombre d'électrons de valence que V.
- 3 L'azote forme l'anion. Quelle est la configuration électronique la plus stable par gain d'électron ? Le cristal est neutre.
- 4 La connaissance des structures n'est plus au programme. La structure NaCl est constituée d'un réseau cubique à faces centrées d'anions, les cations occupant tous les sites octaédriques.

Partie B

- 6 Utiliser la frontière entre les domaines (4) et (5).
- 7 Utiliser le point B.
- 8 Il faut utiliser le point D. La pente de la frontière CD ainsi que le point C permettent de trouver le potentiel en D.

Partie C

- 9 Attention au sens d'écriture de la réaction. La cathode est le pôle + dans une pile en situation de décharge.
- 11 Relier l'intensité I à la vitesse v de la réaction et montrer que v est constante. Les variations de quantités de matière, et de concentrations, sont donc affines.
- 12 Faire un bilan sur les flux molaires $F = Qc$. Supposer que le régime est permanent.
- 13 Question sans intérêt aucun, ne perdez pas votre temps.

Partie D

- 15 Penser à la couleur complémentaire.

Partie E

- 20 [HP] C'est le dibrome Br_2 qui est habituellement utilisé.
- 22 Les ions VO_3^- sont réduits en $\text{VO}(\text{OH})_{2(s)}$.
- 24 L'alcène est-il soluble dans l'eau ?

AUTOUR DU VANADIUM

A. Structure électronique – cristallographie

1 Les trois règles de remplissage des électrons sont :

- **Règle de Klechkowski** : on remplit les sous-couches par ordre croissant de $n + \ell$, avec n croissant en cas d'égalité.
- **Règle de Hund** : lorsqu'une sous-couche est dégénérée, on place les électrons dans un maximum d'orbitales avec des spins parallèles.
- **Principe d'exclusion de Pauli** : deux électrons ne peuvent pas être décrits par le même quadruplet de nombres quantiques (n, ℓ, m_ℓ, m_s) .

Le vanadium appartient à la 4^e ligne de la classification périodique, le nombre quantique principal n maximal est alors $n = 4$. Comme il est dans la 5^e colonne, il possède 5 électrons de valence ($4s^2 3d^3$, d'après l'ordre de Klechkowski). Appliquons les règles de remplissage :

$$\text{V} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3 4s^2$$

L'élément en dessous dans la classification périodique occupe la 5^e ligne et la 5^e colonne et possède aussi 5 électrons de valence. Sa configuration électronique est

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^3 5s^2$$

Le numéro atomique du vanadium s'obtient en comptant les électrons, $Z = 23$. L'élément en dessous de lui dans la classification périodique est le niobium Nb ($Z = 41$).

2 Dans la maille d'un système cubique centré (atomes aux sommets et au centre du cube), il y a contact le long de la diagonale du cube donc

$$a\sqrt{3} = 4R$$

d'où

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{4} \approx 130 \text{ pm}$$

Le jury précise tous les ans dans son rapport qu'il est indispensable de savoir faire les opérations élémentaires de calcul pour donner des applications numériques précises. On note ici en remarque les détails permettant de faire les calculs à la main. La valeur approchée de $\sqrt{3}$ est donnée.

$$R = \frac{300 \times 7/4}{4} = \frac{75 \times 7}{4} = \frac{525}{4} \approx 130 \text{ pm}$$

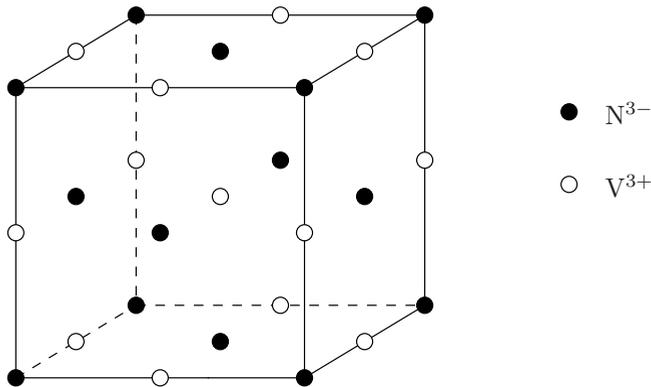
3 L'azote est plus électronégatif que le vanadium, il a donc tendance à former l'anion et le vanadium le cation (comme tous les éléments de transition). Le numéro atomique de l'azote est $Z = 7$ donc sa configuration électronique est

$$\text{N} : 1s^2 2s^2 2p^3$$

Il peut ainsi gagner 3 électrons pour atteindre une structure isoélectronique du gaz noble de sa période (Ne). Le vanadium, lui, perd 3 électrons pour assurer la neutralité du cristal.



4 La maille du nitrure de vanadium, de type NaCl, est constituée d'un réseau cubique à faces centrées de N^{3-} , les ions V^{3+} occupant tous les sites octaédriques.



Les cations occupent des sites octaédriques donc la coordinence cation/anion est **[6]**.

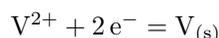
La connaissance précise des structures ioniques à partir de leur famille (ici NaCl) n'est plus explicitement au programme depuis la rentrée 2014. À l'avenir, les énoncés devront préciser la disposition des ions, comme ici dans les indications.

B. Diagramme potentiel-pH

5 Dans un diagramme potentiel-pH, les espèces les plus hautes sont celles dont le degré d'oxydation est le plus élevé. Par ailleurs, les hydroxydes solides n'existent que pour des pH plus élevés que les domaines des ions libres et se situent par conséquent à droite dans le diagramme. On obtient alors les domaines suivants :

d.o.	espèces (domaines)	
+V	VO_2^+ (1)	$VO_2(OH)_{(s)}$ (6)
+IV	VO^{2+} (2)	$VO(OH)_{2(s)}$ (7)
+III	V^{3+} (3)	$V(OH)_{3(s)}$ (8)
+II	V^{2+} (4)	$V(OH)_{2(s)}$ (9)
0	$V_{(s)}$ (5)	

6 Considérons le couple $V^{2+}/V_{(s)}$ dont le potentiel standard est $E^\circ = -1,18 \text{ V}$.



Le potentiel de Nernst pour ce couple s'écrit

$$E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[V^{2+}]}{c^\circ}$$

Centrale Physique PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Michel Fruchart (Professeur agrégé) ; il a été relu par Stanislas Antczak (Professeur agrégé) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

En prenant comme prétexte l'étude d'un viseur de casque militaire, ce sujet traite principalement de mécanique, d'électromagnétisme, de magnétostatique et d'induction. Les trois parties sont véritablement indépendantes.

- Une première partie traite de l'affichage par tubes cathodiques : il s'agit d'un exercice de mécanique du point qui demande de l'attention pour bien appréhender le dispositif modélisé et suivre le déroulement prévu par l'énoncé, mais qui est simple d'un point de vue technique.
- Une deuxième partie traite des afficheurs à cristaux liquides nématiques et donc de la propagation des rayons lumineux dans les nématiques, qui sont des milieux anisotropes, en particulier du point de vue de la polarisation (on parle de biréfringence). L'étude de la biréfringence n'étant pas au programme en PSI, l'énoncé tente d'introduire les notions nécessaires. On peut s'en sortir en suivant le sujet sans se poser trop de questions, mais le sujet échoue à dispenser une compréhension satisfaisante du phénomène sans connaissance préalable. À condition de passer outre l'étape de la biréfringence, le problème est assez bien guidé dans les grandes lignes mais nécessite de soigner les calculs, dont la difficulté technique est progressive. Un obstacle supplémentaire consiste à comprendre le dispositif de la figure 6 et à passer d'une disposition à l'autre entre celles qu'étudie l'énoncé.
- Une dernière partie est dédiée à la détection électromagnétique de posture : il s'agit de savoir de quel angle le pilote d'un hélicoptère tourne la tête par rapport au cockpit. Le début de cette partie est le problème des bobines de Helmholtz : il s'agit d'un exercice d'application classique. On entre ensuite dans le domaine de l'ingénierie : une succession de mesures permet de remonter à trois angles décrivant la posture du pilote. Cette partie n'est pas particulièrement difficile conceptuellement, mais la difficulté technique associée à la description d'un système relativement élaboré se fait sentir.

En faisant appel à des compétences issues de plusieurs parties du programme, ce sujet tourné vers l'ingénierie traite de problèmes concrets. Sans être particulièrement difficile d'un point de vue technique ou physique, il demande un certain recul pour aller au but. Certaines questions s'éloignent du cours, d'autres sont des applications classiques, qui doivent être bien maîtrisées.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.1 Utiliser une méthode énergétique.
- I.B.2 On peut utiliser le fait que la force de Lorentz magnétique ne travaille pas.
- I.B.4 On obtient une équation différentielle du second ordre en dérivant une équation différentielle du premier ordre.

Partie II

- II.A.2 Traiter indépendamment les deux faisceaux en utilisant la loi de Snell-Descartes de la réfraction.
- II.B.1 Quelle est l'énergie d'interaction entre un dipôle électrostatique et un champ électrostatique ?
- II.B.2.c Il est utile d'explicitier les vecteurs de la base $(\vec{n}(z), \vec{n}_\perp(z), \vec{u}_z)$.
- II.B.2.d Utiliser le développement limité de l'exponentielle.
- II.B.2.f Il est plus simple de résoudre l'équation avant d'utiliser l'approximation de Mauguin. Il est plus pratique d'écrire cette approximation en fonction de k_0 , mais l'énoncé semble préférer jongler entre k_0 et λ_0 sans raison apparente.
- II.B.2.g Il s'agit d'attribuer une solution α à une direction de polarisation.
- II.B.2.i Quelle supposition a été faite dans le calcul ? Il faut décider d'un critère arbitraire pour décider si cette supposition est justifiée.
- II.B.3.a Il faut déterminer les solutions α^\pm si cela n'est pas déjà fait.
- II.B.3.d Utiliser la conservation de l'énergie dans un polariseur parfait.

Partie III

- III.A.1 Utiliser la loi de Biot et Savart.
- III.A.2 Il faut utiliser un développement limité à un ordre suffisant. Le développement limité pertinent est donné en annexe.
- III.B.2.a Il faut utiliser la forme dipolaire du champ à partir de cette question.
- III.B.2.f Commencer par écrire l'ensemble des résultats comme une égalité entre vecteurs.
- III.B.5 Utiliser le principe de superposition.

QUELQUES ASPECTS DE LA PHYSIQUE DU VISEUR DE CASQUE TOPOWL

I. AFFICHAGE PAR TUBES CATHODIQUES

I.A.1 Notons L la distance séparant l'anode et la cathode. Le champ électrique dû à la différence de potentiel entre les électrodes est $\vec{E} = -(V_0/L) \vec{u}_z$. Chaque électron est soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{E}$ et à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. Dans un canon à électrons, on s'attend à ce que le poids joue un rôle négligeable. Vérifions-le en calculant le rapport des deux forces

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}\|} = \frac{mLg}{eV_0} = 10^{-15}$$

en prenant comme ordre de grandeur de L la longueur totale du tube cathodique, soit 10 cm. On peut donc négliger l'effet de la pesanteur, ce qu'on fera dans la suite.

D'après le théorème de l'énergie mécanique, la vitesse finale d'un électron :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0$$

ce qui conduit à

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

I.A.2 Numériquement

$$v_0 = 2,65 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Cette vitesse est de l'ordre du dixième de la vitesse de la lumière. C'est habituellement la limite de validité de la mécanique newtonienne : à cette vitesse, elle ne s'écarte que d'un centième de la mécanique relativiste.

I.B.1 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron soumis uniquement à la force de Lorentz donne l'équation du mouvement

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Après projection,

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = ev_z B_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -ev_z B_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = e(v_y B_x - v_x B_y) \end{cases}$$

I.B.2 Comme la force de Lorentz magnétique ne travaille pas, le théorème de l'énergie cinétique assure la conservation de la norme de la vitesse lors du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

Ainsi,

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2$$

Dans la limite où les composantes v_x et v_y sont très petites devant la composante v_z , on en déduit

$$v_z = v_0$$

c'est-à-dire que la vitesse dans la direction de l'axe ne change pratiquement pas. Dans cette approximation les équations différentielles régissant les composantes v_x et v_y sont à coefficients constants, et s'intègrent en

$$v_x(t) = \frac{eB_y}{m} v_0 t \quad \text{et} \quad v_y(t) = -\frac{eB_x}{m} v_0 t$$

Déterminons l'instant t_f où l'électron sort de la zone de champ magnétique non nul : il vérifie $t_f = v_0/\ell$. À cet instant, les composantes transversales de la vitesse sont

$$v_{xf} = \frac{eB_y}{m} \ell \quad \text{et} \quad v_{yf} = -\frac{eB_x}{m} \ell$$

Pour obtenir les déviations transversales, intégrons les vitesses transversales entre l'entrée de la zone où règne un champ magnétique non nul en $t = 0$ et un instant t ,

$$\Delta x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' = \frac{eB_y}{2m} v_0 t^2 \quad \text{et} \quad \Delta y(t) = \int_0^t v_y(t') dt' = -\frac{eB_x}{2m} v_0 t^2$$

et prenons pour t l'instant de sortie $t_f = v_0/\ell$ pour obtenir les déviations

$$\Delta x_{\text{mag}} = \frac{eB_y}{m} \frac{\ell^2}{2v_0} \quad \text{et} \quad \Delta y_{\text{mag}} = -\frac{eB_x}{m} \frac{\ell^2}{2v_0}$$

I.B.3 L'électron libre parcourt la zone de longueur d en un temps d/v_0 . Les déviations transversales dans cette zone sont donc

$$\Delta x_{\text{lib}} = v_{xf} \frac{d}{v_0} \quad \text{et} \quad \Delta y_{\text{lib}} = v_{yf} \frac{d}{v_0}$$

Les déviations totales sont alors

$$\begin{cases} \Delta x_{\text{tot}} = \Delta x_{\text{mag}} + \Delta x_{\text{lib}} \\ \Delta y_{\text{tot}} = \Delta y_{\text{mag}} + \Delta y_{\text{lib}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x_{\text{tot}} = \left(\frac{\ell}{2} + d\right) \frac{B_y e \ell}{m v_0} \\ \Delta y_{\text{tot}} = -\left(\frac{\ell}{2} + d\right) \frac{B_x e \ell}{m v_0} \end{cases}$$

Imposons $|\Delta x_{\text{tot}}| = |\Delta y_{\text{tot}}| = \Delta x_{\text{max}}$: cela correspond à une valeur maximale de champ magnétique

$$B_{\text{max}} = \frac{\Delta x_{\text{max}}}{(\ell/2 + d) e \ell / m v_0} = 6,0 \text{ mT}$$

Centrale Physique et Chimie PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Jean (ENS Ulm) ; il a été relu par Kim Larmier (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Le sujet développe différentes techniques d'analyse physico-chimique permettant d'établir l'acidité globale d'un vin et de quantifier la présence des différents acides qui le composent.

- La première partie étudie le dosage pH-métrique de l'ensemble des acides d'un vin rouge. On modélise le vin par un acide faible que l'on dose par une base forte, puis on étudie la courbe de dosage. Cette partie permet de se familiariser avec le concept d'acidité totale d'un vin. Elle introduit les parties suivantes en présentant les limites d'une analyse par titrage.
- La deuxième partie présente la technique de chromatographie en phase liquide qui permet de séparer les divers acides du vin. La mécanique des fluides est au centre de l'étude avec l'écoulement de Poiseuille cylindrique : on démontre par une approche microscopique le débit volumique dans un tel écoulement. On envisage ensuite l'écoulement de Poiseuille à travers un milieu poreux modélisé par un empilement hexagonal compact de billes micrométriques, ce qui permet d'utiliser ses connaissances en cristallographie. Enfin, on détermine le temps de rétention de chaque espèce chimique en fonction de sa viscosité en vue d'analyser un chromatogramme réel dans la partie IV.
- La partie III traite de l'absorption des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels. On commence par démontrer l'équation de propagation d'ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell. Puis on adopte un point de vue énergétique avec le vecteur de Poynting pour déterminer l'atténuation de l'onde dans le milieu.
- La dernière partie commence par l'analyse d'un chromatogramme expérimental à l'aide des résultats de la fin de la partie II. Elle se poursuit par l'étude d'une réaction acido-basique mettant en œuvre des diacides afin de modéliser la fermentation du vin. Une brève analyse de la cinétique de cette fermentation conclut l'épreuve.

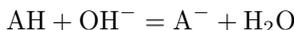
Le sujet ne présente pas de difficulté calculatoire particulière et reste proche du cours. De façon étonnante sa difficulté n'est guère progressive car on retrouve tout au long du sujet des sous-parties extrêmement abordables (les sous-parties IV.B.2 ou II.B par exemple). Enfin, seule la partie II.A qui étudie l'écoulement de Poiseuille grâce à l'équation de Navier-Stokes est à présent hors programme. Le reste du problème peut être abordé avec les outils du nouveau programme.

INDICATIONS

- I.A Quel critère sur les pKa permet de séparer deux acidités ?
- I.C Attention à ne pas confondre n et $[\text{H}_3\text{O}^+]$! n est la quantité maximale d'ions H_3O^+ libérable par litre de vin, $[\text{H}_3\text{O}^+]$ est la concentration en ions H_3O^+ en solution lorsque l'acidité du vin fixe le pH.
- I.D Commenter d'après l'analyse fournie dans l'énoncé.
- II.A.2 Utiliser l'invariance du problème et les caractéristiques de l'écoulement introduites : « écoulement stationnaire et incompressible ».
- II.A.3 On donne le gradient en coordonnées cylindriques :
- $$\vec{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$$
- Une fonction $v(r)$ est une constante vis-à-vis de la variable z .
- II.A.4 Ne pas oublier la condition d'adhérence en $r = a$.
- II.A.6 Interpréter le rotationnel du champ de vitesse par la circulation de la vitesse sur un petit lacet autour du vecteur directeur de $\vec{\text{rot}} \vec{v}$ et évaluer l'impact sur une particule de fluide.
- II.A.7 Erreur d'énoncé grossière mais déstabilisante : la masse volumique de la solution d'acide sulfurique est évidemment $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- II.B.3 Appliquer la définition de la compacité, $C = V_{\text{occupé}}/V_{\text{total}}$, à l'échelle de la colonne entière.
- II.C.1 Comparer u à v_d de la question II.A.7 en terme d'ordre de grandeur.
- II.C.2 Effectuer l'analyse dimensionnelle du débit volumique de la loi de Poiseuille.
- II.C.4 Vérifier la cohérence de la relation d'ordre obtenue entre η et η_a grâce à l'indication de l'énoncé : « un milieu poreux [...] ralentit l'écoulement correspondant à l'absence de phase stationnaire ».
- III.A.3 Appliquer $\vec{\text{rot}}$ à l'équation de Maxwell-Faraday ou $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation de Maxwell-Ampère. Utiliser $\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$.
- III.B.1 Utiliser l'équation de Maxwell-Ampère ou l'équation de Maxwell-Faraday pour relier $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$.
- III.B.3 Garder à l'esprit que $\langle \cos^2(X) \rangle = 1/2$ et $\langle \sin(X) \cos(X) \rangle = 0$.
- III.B.4 On rencontre usuellement l'expression logarithmique de la loi recherchée.
- IV.A.1 Utiliser les résultats de la question II.C.6.
- IV.A.3 L'énoncé précise que la longueur d'onde utilisée permet de détecter seulement les acides carboxyliques. Les six formes les plus acides ont été identifiées, quels autres acides carboxyliques reste-t-il ?
- IV.A.4 Relire le paragraphe de l'énoncé au début de la partie II.
- IV.B.1.a Utiliser la formule reliant le pH au pKa et aux concentrations en acide et en base. Une relation de conservation de la matière est aussi nécessaire.
- IV.B.1.c La réponse est dans l'énoncé.

I.A Les nombreux couples acido-basiques mis en jeu lors du titrage pH-métrique d'un vin ont des pKa trop proches (compris entre $pK_a = 3,04$ et $pK_a = 6,41$) pour que les réactions soient successives. La réaction de dosage met en jeu tous les acides présents dans le vin, l'unique saut de pH visible correspond à cette réaction globale.

I.B Le monoacide faible AH réagit avec les ions OH^- de la soude NaOH (dont les ions Na^+ sont dits « spectateurs ») selon



Le quotient de réaction à l'équilibre est la constante d'équilibre de la réaction K_r :

$$K_r = \frac{[\text{A}^-]_{\text{eq}} c^\circ}{[\text{AH}]_{\text{eq}} [\text{OH}^-]_{\text{eq}}}$$

où c° est la concentration de référence : $c^\circ = 1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. En multipliant numérateur et dénominateur de K_r par $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}}$ et par c° , on obtient

$$K_r = \frac{[\text{A}^-]_{\text{eq}} [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}}}{[\text{AH}]_{\text{eq}} c^\circ} \cdot \frac{c^{\circ 2}}{[\text{OH}^-]_{\text{eq}} [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}}}$$

Or, la constante de réaction de l'acide AH dans l'eau est

$$K_a = \frac{[\text{A}^-]_{\text{eq}} [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}}}{[\text{AH}]_{\text{eq}} c^\circ}$$

et la constante de la réaction d'autoprotolyse de l'eau vaut

$$K_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}} [\text{OH}^-]_{\text{eq}}}{c^{\circ 2}}$$

De plus, par définition $K_a = 10^{-pK_a}$, d'où

$$K_r = \frac{[\text{A}^-]_{\text{eq}} c^\circ}{[\text{AH}]_{\text{eq}} [\text{OH}^-]_{\text{eq}}} = \frac{10^{-pK_a}}{K_e} = 10^{10} \gg 1$$

La constante d'équilibre K_r est très grande devant 1, ce qui garantit le caractère total de la réaction, condition nécessaire pour la réalisation d'un titrage. Par la suite, on omet c° par souci de lisibilité.

Une réaction totale est une condition nécessaire pour la réalisation d'un dosage, mais pas suffisante. En effet, une réaction de dosage doit également être rapide (ce qui est le cas de la plupart des réactions acido-basiques) et univoque (elle ne doit pas être perturbée par une autre réaction ayant les mêmes réactifs mais conduisant à des produits différents).

I.C Le dosage est terminé lorsque l'équivalence est dépassée. L'équivalence est définie comme le volume de soude versé pour lequel les réactifs sont en proportions stœchiométriques. **Ce volume est $v_e = 10,5 \text{ mL}$.**

On remarque que n , définie comme la quantité de matière d'ions H_3O^+ que peut libérer un litre de vin, est reliée à la quantité de matière d'acide faible n_{AH} présente dans le volume V à doser par

$$n_{\text{AH}} = V \cdot n$$

Afin de déterminer n , commençons par écrire le tableau d'avancement en quantité de matière de la réaction de dosage :

	AH	+	OH ⁻	=	A ⁻	+	H ₂ O
État initial	n_{AH}		$C_0 \cdot v_e$		0		\
Équivalence	$n_{\text{AH}} - \zeta_e = 0$		$C_0 \cdot v_e - \zeta_e = 0$		ζ_e		\

À l'équivalence, les réactifs sont dans les proportions stœchiométriques et on a donc

$$n_{\text{AH}} = V \cdot n = C_0 \cdot v_e$$

L'acidité totale est

$$n = \frac{C_0 \cdot v_e}{V} = 105 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Dans le vin, le pH est fixé par la réaction prépondérante qui fixe l'équilibre : il s'agit de la réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte présents en solution. Dans ce cas, l'acide le plus fort est AH, la base la plus forte est l'eau. Écrivons cette réaction et le tableau d'avancement en concentration associé :

	AH	+	H ₂ O	=	A ⁻	+	H ₃ O ⁺
État initial	n		\		0		0
État d'équilibre	$n - x_{\text{eq}}$		\		x_{eq}		x_{eq}

La constante de la réaction qui fixe l'équilibre est

$$K_r' = K_a = \frac{[\text{A}^-]_{\text{eq}} [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}}}{[\text{AH}]_{\text{eq}}}$$

En remplaçant les concentrations des réactifs et des produits par leur valeur à l'équilibre, on obtient

$$K_a = \frac{x_{\text{eq}}^2}{(n - x_{\text{eq}}) \cdot c^\circ} \approx \frac{x_{\text{eq}}^2}{n}$$

en supposant $x_{\text{eq}} \ll n$ (hypothèse raisonnable pour un acide faible faiblement dilué). On obtient alors la concentration à l'équilibre

$$x_{\text{eq}} = [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}} = \sqrt{K_a \cdot n}$$

d'où

$$\text{pH} = -\log(x_{\text{eq}}) = \frac{1}{2} (\text{p}K_a - \log n) = 2,49$$

Ce vin de Bordeaux Supérieur 2002 répond au critère de commercialisation fixé à $n > 50 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$, même si son pH est légèrement en deçà de la fourchette usuelle présentée dans l'énoncé.

I.D La quantité de matière d'acide sulfurique présente dans V litres de $\text{H}_2\text{SO}_4(\text{aq})$ préparés à partir d'une solution d'un litre à $m \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ est

$$\nu = \frac{m \cdot V}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4}}$$

Écrivons la réaction de dosage de l'acide sulfurique par de la soude et le tableau d'avancement associé :

	H ₂ SO ₄	+	2OH ⁻	=	SO ₄ ²⁻	+	2H ₃ O ⁺
État initial	ν		$C_0 \cdot v_e$		0		0
Équivalence	$\nu - \zeta_e = 0$		$C_0 \cdot v_e - 2\zeta_e = 0$		ζ_e		$2\zeta_e$