GILLES COSTANTINI

Les 100 exercices de MATHS pour bien commencer sa licence

DE LA TERMINALE AUX ÉTUDES SUPÉRIEURES

Les 100 exercices de maths pour bien commencer sa licence

de boeck
SUPÉRIEUR

-SUP-
en poche

MATHS

L1 / L2

Les 100 exercices de maths pour bien commencer sa licence

De la terminale aux études supérieures

Gilles Costantini

de boeck
SUPÉRIEUR

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : juin 2021
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2021/13647/095

ISBN : 978-2-8073-3165-5

Sommaire

Introduction

Le passage entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur est souvent un moment fort et parfois délicat dans la vie des étudiants. En effet, les jeunes lycéens ne sont pas toujours prêts à affronter les exigences de l'enseignement supérieur tant en terme de compétences, de technicité que d'autonomie.

La classe de terminale est essentiellement centrée sur la préparation au baccalauréat et ne peut matériellement pas offrir toutes les ouvertures correspondant à la diversité des cursus universitaires que choisiront les futurs étudiants.

En mathématiques, de nombreuses compétences doivent implicitement être maîtrisées afin d'envisager sereinement le niveau L_1 des diverses licences scientifiques.

Cet ouvrage propose donc 100 exercices qui permettront aux futurs étudiants de retravailler et approfondir ces diverses compétences. Ces exercices couvrent un large spectre de domaines mathématiques (analyse, dénombrement, suites, nombres complexes, géométrie, etc.) et permettront à tous les étudiants envisageant une licence (ou autres cursus) de consolider leur niveau. Certains exercices sont des grands classiques, d'autres sont plus originaux. Certains sont très abordables, d'autres le sont moins. Dans l'ensemble, ils peuvent tous se résoudre avec les connaissances d'un bac général avec la spécialité mathématiques. Certaines notions d'enseignement supérieur sont cependant abordées pour aider les étudiants à réaliser cette transition le plus efficacement possible.

Les exercices sont répertoriés par compétences ou savoir-faire (voir tableau ci-contre indiquant, pour chaque compétence, les numéros d'exercices correspondants). Cela permet au lecteur de cibler ce qu'il souhaite travailler. Il n'est pas nécessaire de faire une lecture linéaire de l'ouvrage.

Liste des compétences utilisées dans les exercices

Appliquer	28 44 46 47 48 53 65 71 77 81 96 98
Canoniser	36 40 51 52 56 57 59 64 66 67 72 90
Changer de registre	49 58 60
Changement de fonction	97 99 100
Changement de variable	67 80 90
Combiner	4 8 9 15 17 18 20 21 23 24 25 54 70 71 77 78
Comparer	1 2 10 12 18 20 27 32 33 35 38 39 76 88 91 95
Composer	35 65 79
Confronter	3 16 36 42
Conjecturer	1 5 72 73 75
Décomposer	10 11 14 19 53 54 69 87 90 91
Dénombrer	15 16 17 18 20 21
Développer	34 39 52 57 59 60 61 65 72 87
Dériver	5 6 7 28 29 31 32 35 38 47 50 51 88 89 97
Dériver une composée	30 37 79 95
Encadrer	5 12 33 35 38 45 92 93
Étudier des variations	5 6 7 27 29 30 32 38 50 79 88 95
Étudier une limite	4 5 6 7 8 10 11 12 14 30 33 34 35 46 79 81 92 93
Étudier un signe	1 32 95
Expliciter	4 83 84
Factoriser	19 27 34 52 57 59 62 66 68 72 82
Généraliser	1 21 15 37
Identifier	57 59 60 61 62 66 68 90
Illustrer	64 80
Intégrer	11 88 90 93 94 95
Intégrer par parties	89 92
Interpréter	41 58 85 86 94
Inverser	10 11 12 22 82 91 93 99
Majorer (ou minorer)	1 11 31 32 38 39 91 93 95
Modéliser	3 15 16 17 25 32 37 41 42 43 55 56 82 85 86 100
Primitiver	61 89 96
Programmer	29 70
Rais. par disjonction des cas	8 9 22 27 28 35 46 73 76
Raisonner par l'absurde	8 10 22 31 46 48 69 73 75
Raisonner par récurrence	1 5 6 7 12 13 18 26 48 76 83 84 91 92
Repérer et représenter	30 40 41 43 44 50 51 80
Résoudre une équation	2 4 5 6 7 36 40 49 51 52 64 67 77 94 98 100
Rés. une équation dans $\mathbb{C}$	57 58 62 66
Résoudre une équation diff.	96 97 98 99 100
Résoudre une inéquation	3 36 37 43 88 99
Résoudre un système	17 23 24 25 26 55 56 57 59 63 66 78 82 85 86 96
Sommer	8 9 10 11 13 14 17 19 20 65 68 81 91 92
Sommer via une formule	2 3 62 63 75
Spécialiser	31 33 44 48 49 63 80 90 96 80
Substituer	23 24 55 63 86
Symétriser	42 45 46 54 67 68
Télescoper	8 13 14 81 95
Tester	29 40 73 75
Transposer, Transformer	13 27 34 36 44 53 76
Trier	36 49
Utiliser une suite auxiliaire	4 6 7 9
Vérifier, contrôler	36 49 52 70 83 84 87

Exercice 1
Raisonner par récurrence

[COMPÉTENCES : Conjecturer - Comparer - Étudier un signe - Généraliser - Majorer - Récurrence]

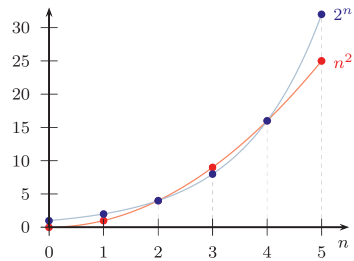
Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ où n_0 est un entier à préciser, on a :

$$n^2 \leqslant 2^n$$

Soit $\mathcal{P}$ la propriété définie par : $\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$

L'énoncé ne nous fournit pas la valeur de l'entier n_0 pour lequel cette propriété est initialisée. Calculons les premières valeurs de n^2 et 2^n afin d'émettre une conjecture.

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
2^n	1	2	4	8	16	32



On constate que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour $n = 0,\ 1$ et 2 mais pas pour $n = 3$ puis redevient vraie pour $n = 4$ et semble-t-il définitivement. On a donc, bien sûr, $\mathcal{P}(4)$ d'après le tableau ci-dessus ce qui permet d'initialiser la récurrence pour $n_0 = 4$.
Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel $n \geqslant 4$ on ait :

$$\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$$

Alors, sous cette condition, notre objectif va être d'en déduire que l'on a également :

$$\mathcal{P}(n+1) : (n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$$

Élaborons une déduction en partant du développement suivant :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Développement que nous allons majorer étapes par étapes (d'autres façons de raisonner sont possibles !). Nous pouvons écrire :

car $4 \leqslant n$

$$(n+1)^2 \leqslant n^2 + 2n + 2 \leqslant n^2 + 2n + 2n \leqslant n^2 + 4n \leqslant n^2 + n^2 \leqslant 2n^2 \leqslant 2 \times 2^n \leqslant 2^{n+1}$$

car $n \geqslant 4$ (et donc $n \geqslant 1$)

car on a supposé $\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$

On obtient ainsi : $$(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$$
Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.
On a donc prouvé que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang 4. Comme, par ailleurs, elle est vraie au rang 4, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 4$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 4$, on a bien : $n^2 \leqslant 2^n$

Question de prolongement

Comparer n^3 et 3^n. Comparer n^4 et 4^n. Etc.

Il s'agit de généraliser la situation en comparant n^a et a^n pour $a \geqslant 3$.
Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par :
$$u_n = \frac{n^a}{a^n} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n) = a\ln(n) - n\ln(a)$$
Étudions le signe de la fonction f_a définie pour $x > 0$ par :
$$f_a(x) = a\ln(x) - x\ln(a)$$
La fonction f_a est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ avec $f_a'(x) = \frac{a}{x} - \ln(a)$.

On a alors : $$f_a'(x) \geqslant 0 \iff \frac{a}{x} - \ln(a) \geqslant 0 \overset{\ln(a)>0}{\iff} x \leqslant \frac{a}{\ln(a)}$$
D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{a}{\ln(a)}$		a		$+\infty$
Signe de $f_a'(x)$	‖	$+$	0		$-$		
Variations de la fonction f_a	‖	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	

Noter que $\frac{a}{\ln(a)} < a$ car $\ln(a) > 1$ puisque $a \geqslant 3 > \mathbf{e}$.

Puisque la fonction f_a est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{a}{\ln(a)}\,,+\infty\right[$ avec $f_a(a) = 0$, on en déduit que la fonction f_a est **négative** sur l'intervalle $[a\,,+\infty[$.
Il en va de même pour la suite (v_n) pour $n \geqslant a$ puisque $v_n = f_a(n)$.
Et comme $u_n = \mathbf{e}^{v_n}$, on a $u_n \leqslant 1$, c'est-à-dire :
$$\forall n \geqslant a,\ n^a \leqslant a^n$$
Par exemple, on a $n^5 \leqslant 5^n$ pour tout $n \geqslant 5$.

Exercice 2 Suite arithmétique

[COMPÉTENCES : Modéliser - Résoudre une équation - Sommer via une formule]

Pour creuser un tunnel, une entreprise fournit le devis suivant :

- installation du chantier : 50000 €
- coût du forage du premier hectomètre : 70000 €
- chaque hectomètre supplémentaire coûte 5000 € de plus que le précédent.

On désigne par u_n le coût, en milliers d'euros, du forage du $n^{\text{ième}}$ hectomètre.

1. Expliquer pourquoi cette suite (u_n) est arithmétique.
Préciser sa raison r.

2. Exprimer u_n en fonction de n.
Que vaut u_{12} ?

3. On note s_n le coût total, en k€, du forage de n hectomètres (sans compter l'installation du chantier).
On a donc $s_1 = 70$ et $s_2 = 70 + 75 = 145$.
Exprimer s_n en fonction de n. En déduire s_{12}.

4. En réalité, le coût total du forage, installation du chantier comprise, a été de 1920 milliers euros. Combien d'hectomètres ont été forés ?

1. On passe de chaque terme au suivant en ajoutant 5 milliers d'euros.
La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 5$.

2. Dans le contexte d'une suite arithmétique, on passe du terme u_0 au terme u_n en ajoutant n fois la raison r :

$$u_n = u_0 + nr$$

Mais ici, la suite est indexée à partir de $n = 1$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 70 + 5(n-1) = 65 + 5n$$

Notons que l'on retrouve bien $u_1 = 70$ et $u_2 = 75$ avec cette formule.
On en déduit :

$$u_{12} = 65 + 5 \times 12 = 125$$

Le coût du forage du 12^{e} hectomètre sera de 125000 euros.

3. Il s'agit de calculer la somme suivante :

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Nous savons que la somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante :

$$S = \frac{N(P+D)}{2}$$

où P est le premier terme de la somme et D le dernier.

Ici, notre somme contient n termes et via la relation ci-dessus, on a :

$$s_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(70 + (65 + 5n))}{2} = \frac{n(135 + 5n)}{2}$$

Et en particulier : $\quad s_{12} = \dfrac{12(135 + 5 \times 12)}{2} = 1170$

Le coût du forage d'un total de 12 hectomètres sera de 1170000 euros.

4. Il faut donc résoudre l'équation :

$$\underbrace{\frac{n(135+5n)}{2}}_{\text{coût total de forage de } n \text{ hectomètres}} + \overbrace{50}^{\text{installation du chantier}} = 1920$$

Multiplions par 2 : $\quad n(135 + 5n) + 100 = 3840$

Développons : $\quad 135n + 5n^2 - 3740 = 0$

$$5n^2 + 135n - 3740 = 0$$

Simplifions par 5 : $\quad n^2 + 27n - 748 = 0$

On obtient une équation du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 27^2 - 4 \times 1 \times (-748) = 3721$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions mathématiques :

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-27 - 61}{2} = -44$$

et

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-27 + 61}{2} = 17$$

Mais $n \in \mathbb{N}$, il y a donc une seule solution au problème posé, à savoir $n = 17$.

En conclusion, si le coût total est de 1920 k€ (installation du chantier comprise), c'est que l'entreprise a foré 17 hectomètres.

Exercice 3
Suite géométrique

[COMPÉTENCES : Confronter - Résoudre une inéquation - Sommer via une formule]

Dans un pays fictif, un étudiant paye, en 2020, un loyer mensuel de 400 € pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%.

On note u_n le loyer mensuel après de l'année $2020 + n$, ainsi $u_0 = 400$.

1. Calculer u_1, c'est-à-dire le montant du loyer mensuel lors de l'année 2021.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. En 2026, le loyer mensuel aura augmenté par rapport à 2020 d'environ :

☐ 42% ☐ 50% ☐ 13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

4. Si l'étudiant compte rester jusqu'en 2026 inclus dans sa location, quelle sera la somme totale payée pour l'ensemble de tous les loyers ?

5. Durant quelle année cette somme totale dépassera-t-elle 96000 € ?

1. Une augmentation de 7% se traduit via une multiplication par le coefficient $\left(1 + \frac{7}{100}\right) = 1{,}07$.

Ainsi :
$$u_1 = 1{,}07 \times u_0 = 428$$

En 2021, le montant du loyer mensuel de cet étudiant est de 428 euros.

2. Chaque année, le montant du loyer est multiplié par le même nombre, à savoir $q = 1{,}07$. La suite (u_n) est donc géométrique.
On a donc pour tout rang n :
$$u_n = u_0 \times q^n = 400 \times 1{,}07^n$$

3. Il s'agit de calculer u_6. D'après la question précédente :
$$u_6 = 400 \times 1{,}07^6 \approx 600$$

Le montant du loyer est passé de 400 euros à 600 euros, il a donc augmenté de 50%. On peut le voir également en calculant juste $1{,}07^6 \approx 1{,}50$. Bref :

☐ 42% ☒ 50% ☐ 13%

Ainsi, avec les pourcentages, 6 augmentations successives de 7% ne donnent pas une augmentation de 42% mais bel et bien une augmentation de 50%.

4. L'année initiale, l'étudiant paye un loyer annuel égal à :
$$12u_0 = 12 \times 400 = 4800 \text{ euros}$$

Après une année d'occupation, l'étudiant paye un loyer annuel égal à :

$$12u_1 = 12 \times 428 = 5136 \text{ euros}$$

Et ainsi du suite. Il s'agit donc de calculer la somme suivante :

$$S_6 = 12u_0 + 12u_1 + \cdots + 12u_6 = 12(u_0 + u_1 + \cdots + u_6)$$

Rappelons la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0\big(1 - q^{n+1}\big)}{1 - q}$$

Dans notre cas $n = 6$ et la somme contient bien sûr 7 termes (on démarre à u_0) ce qui donne (en multipliant également par 12 pour se ramener au calcul du loyer annuel) :

$$S_6 = 12 \times \frac{400\big(1 - 1{,}07^7\big)}{1 - 1{,}07} = \frac{4800\big(1 - 1{,}07^7\big)}{-0{,}07} \approx 41539{,}30$$

S'il occupe ce logement jusqu'en 2026 inclus, l'étudiant doit donc prévoir un budget de 41539 euros pour ses loyers.

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation (d'inconnue le rang n de l'année) suivante :

$$\frac{4800\big(1 - 1{,}07^{n+1}\big)}{1 - 1{,}07} \geqslant 96000$$

On isole le terme $1{,}07^n$ afin d'envisager un passage au logarithme :

$$\frac{1 - 1{,}07^{n+1}}{-0{,}07} \geqslant 20 \iff 1 - 1{,}07^n \leqslant -1{,}4 \iff 1{,}07^n \geqslant 2{,}4$$

Par croissance de la fonction ln sur $]0\,,+\infty[$ et tenant compte de la relation $\ln(A^N) = N\ln(A)$ (pour $A > 0$ et $N \in \mathbb{N}$) :

$$(n+1)\ln(1{,}07) \geqslant \ln(2{,}4)$$

Et comme $\ln(1{,}07) > 0$ (car $1{,}07 > 1$) et que n est un entier :

$$n + 1 \geqslant \frac{\ln(2{,}4)}{\ln(1{,}07)} \quad \text{d'où} \quad n \geqslant 12$$

C'est donc durant l'année 2032 que le cumul des loyers dépassera les 96000 euros.

Exercice 4 Suite arithmético-géométrique

[COMPÉTENCES : Combiner - Étudier une limite - Expliciter - Résoudre une équation - Suite auxiliaire]

Dans une région, la population de loups diminue de 20% chaque année. Pour éviter qu'elle ne disparaisse, les écologistes réintroduisent 20 loups chaque année. En 2020, il y avait 200 loups dans cette région. On modélise cette situation par une suite (u_n) définie par $u_0 = 200$ et :

$$u_{n+1} = 0{,}80u_n + 20$$

où n est le nombre d'années écoulées après 2020.

1. On pose $v_n = u_n - \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer le réel α afin que la suite (v_n) soit géométrique.

2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

3. À long terme, cette population de loups va-t-elle se stabiliser ?

1. La suite (v_n) est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout rang n, $v_{n+1} = qv_n$.
On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha = 0{,}80u_n + 20 - \alpha = 0{,}80(v_n + \alpha) + 20 - \alpha \\ &= 0{,}80v_n + 20 - 0{,}20\alpha \end{aligned}$$

Pour que la suite (v_n) soit géométrique, il faut et il suffit que $20 - 0{,}20\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 100$.
On a donc $v_n = u_n - 100$ et $v_0 = u_0 - 100 = 200 - 100 = 100$.

2. Puisque la suite (v_n) est géométrique, on a :

$$v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0{,}80^n$$

Et *via* la relation $v_n = u_n - 100$, on en déduit :

$$u_n = v_n + 100 = 100 \times 0{,}80^n + 100$$

3. Puisque $0{,}80 \in]-1\,,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}80^n = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 100$$

À long terme, le nombre de loups va se stabiliser à 100 bêtes.

Question de prolongement

Déterminer une formule explicite pour la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ où } a \neq 1 \text{ et } b \neq 0$$

Déjà, si la suite (u_n) converge vers un réel α alors par continuité de la fonction affine $x \mapsto ax + b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = a \lim_{n \to +\infty} u_n + b$$

$$\alpha = a\alpha + b \quad \text{c-à-d} \quad (1 - a)\alpha = b$$

Et puisque $a \neq 1$:
$$\alpha = \frac{b}{1 - a}$$

Ce réel α s'appelle le *point fixe*[1] de la suite (u_n).
On pose ensuite, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \alpha$ ainsi :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n + (1 - a)\alpha - \alpha = au_n - a\alpha \\ &= a(u_n - \alpha) = av_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a.
On peut aussi retrancher, membre à membre les deux lignes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & a\,u_n + b \\ \alpha & = & a\,\alpha + b \end{array} \right.$$

Ce qui donne :
$$u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$$

Et on retrouve bien :
$$v_{n+1} = a\,v_n$$

Puisque cette suite (v_n) est géométrique, on a pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha)a^n$$

D'où la formule explicite donnant le terme général u_n :

$$\boxed{u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha}$$

Bien sûr, si $u_0 = \alpha$, alors la suite (u_n) est constante.
Si $a \in]-1\,,1[$, alors la suite (u_n) converge vers son point fixe α.
Si $a > 1$ (et $u_0 \neq \alpha$), alors la suite (u_n) diverge vers $\pm\infty$ (selon que $u_0 > \alpha$ ou $u_0 < \alpha$).

1. Cela signifie que **si** la suite (u_n) converge, cela ne peut être que vers ce point fixe α. Mais ce point fixe α joue également un rôle même si la suite (u_n) diverge.

Exercice 5 Suite récurrente

[COMPÉTENCES : Conjecturer - Dériver - Encadrer - Équation - Limite - Récurrence - Variations]

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{5}u_n(u_n+1) \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de cette suite ?
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \frac{1}{5}x(x+1)$$
   Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\,,4]$.
3. En utilisant la fonction f précédente, démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$
   En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer sa limite ℓ.

1. On a :
   $$u_1 = \frac{1}{5}u_0(u_0+1) = \frac{12}{5} = 2{,}4$$
   $$u_2 = \frac{1}{5}u_1(u_1+1) = \frac{1}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{17}{5} = \frac{204}{125} = 1{,}632$$
   $$u_3 = \frac{1}{5}u_2(u_2+1) = \frac{1}{5} \times \frac{204}{125} \times \frac{329}{125} = \frac{67116}{78125} = 0{,}859$$
   Cette suite semble décroissante.
2. La fonction f est le produit de deux fonctions affines (à savoir $x \mapsto \frac{1}{5}x$ et $x \mapsto x+1$) positives et croissantes sur l'intervalle $[0\,,4]$, elle est donc croissante sur cet intervalle.
   On peut également calculer sa dérivée :
   $$f'(x) = \frac{1}{5}(2x+1)$$
   et on constate que l'on a bien $f'(x) \geqslant 0$ lorsque $x \in [0\,,4]$.

Par conséquent, la fonction f est bien croissante sur l'intervalle $[0\,,4]$.

3. On considère la propriété $\mathcal{P}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

- on a bien $\mathcal{P}(0)$ car $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$.
- supposons $\mathcal{P}(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

  On applique la fonction croissante f à ces inégalités :

$$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant 4$$

  Or $f(0) = 0$ et $f(4) = 4$ d'où :

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

  Ce qui correspond à $\mathcal{P}(n+1)$.

On a montré que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geqslant 0$), elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit deux informations :

- la suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$);
- la suite (u_n) est minorée par 0.

Par conséquent, la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0\,,4]$.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = f(u_n)$

avec f **continue**. Par conséquent, par passage à la limite, il vient :

$$\ell = f(\ell)$$

$$\ell = \frac{1}{5}\ell(\ell+1)$$

$$5\ell = \ell^2 + \ell$$

$$\ell^2 - 4\ell = 0$$

$$\ell(\ell-4) = 0$$

$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = 4$$

Or, la suite (u_n) est décroissante avec $u_0 = 3$. Elle ne peut donc par converger vers 4. Par conséquent, cette suite converge vers 0.