

GILLES COSTANTINI

Les

100

exercices de

MATHS

pour bien commencer
sa licence

DE LA TERMINALE
AUX ÉTUDES SUPÉRIEURES

B

Les 100 exercices de maths pour bien commencer sa licence

**-SUP-
en poche**

MATHS

L1 / L2

Les 100 exercices de maths pour bien commencer sa licence

**De la terminale
aux études supérieures**

Gilles Costantini

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

© De Boeck Supérieur s.a., 2021
Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : juin 2021
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2021/13647/095

ISBN : 978-2-8073-3165-5

Sommaire

Introduction	1
1 Raisonner par récurrence	4
2 Suite arithmétique	6
3 Suite géométrique	8
4 Suite arithmético-géométrique	10
5 Suite récurrente	12
6 Suite homographique	14
7 Suite homographique (bis)	16
8 Série géométrique	18
9 Série géométrique « dérivée »	20
10 Série harmonique	22
11 Série harmonique alternée	24
12 Utilisation du théorème des gendarmes	26
13 Somme des carrés et des cubes	28
14 Sommes télescopiques	30
15 Marche aléatoire dans un quadrillage	32
16 Paradoxe des anniversaires	34
17 Nombre de parties d'un ensemble	36
18 Relation de Pascal	38
19 Espérance de la loi binomiale	40
20 Formule de Vandermonde	42
21 Loi hypergéométrique : l'euromillions	44
22 Une bijection de \mathbb{Z} dans \mathbb{N}	46
23 Systèmes linéaires 2×2	48
24 Système linéaire 3×3	50
25 Situations débouchant sur un système	52
26 Suite récurrente linéaire d'ordre 2	54
27 Sens de variation de fonctions usuelles	56
28 Étude de la dérivabilité de fonctions usuelles	58

29	Algorithme de dichotomie	60
30	Courbe de Gauss	62
31	Fonction dérivable à dérivée non continue	64
32	Prouver une inégalité	66
33	Limites avec exponentielles et logarithmes	68
34	Formes indéterminées	70
35	Une suite convergeant vers le nombre e	72
36	Résoudre une (in)équation avec logarithmes	74
37	Étude d'une transition démographique	76
38	Quelques inégalités classiques	78
39	Comparaison de moyennes	80
40	Calcul d'espérance	82
41	Formule de Bayes et test de dépistage	84
42	Loi binomiale et pièce de monnaie	86
43	Loi binomiale et dé	88
44	Formules d'addition pour le sinus et le cosinus	90
45	Continuité du sinus et du cosinus	92
46	Deux limites trigonométriques utiles	94
47	Dérivabilité du sinus et du cosinus	96
48	Angles associés	98
49	Transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$	100
50	Fonctions sinus et cosinus hyperboliques	102
51	Fonctions hyperboliques réciproques	104
52	Équations de cercles dans le plan	106
53	Parallélogramme et identités de polarisation	108
54	Propriétés du tétraèdre régulier	110
55	Intersection entre un plan et une droite	112
56	Intersection entre une sphère et une droite	114
57	Équations dans \mathbb{C}	116
58	Ensemble de points liés à des relations dans \mathbb{C}	118
59	Formules de Viète	120
60	Valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	122

61	Formules d'Euler	124
62	Racines n -ièmes de l'unité	126
63	Valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$	128
64	Nombre d'or	130
65	Polynômes de Tchebychev	132
66	Équations du 2 nd degré à coefficients dans \mathbb{C}	134
67	Équation du 3 ^e degré. Méthode de Cardan	136
68	Nombres complexes et suites	138
69	Quelques nombres irrationnels	140
70	Une équation de Pell-Fermat	142
71	Propriétés du PGCD	144
72	Nombres composés	146
73	Nombres premiers	148
74	Célèbres conjectures sur les nombres premiers	150
75	Nombres de Mersenne	152
76	Suite de Fibonacci et nombres premiers entre-eux	154
77	Équation diophantienne $ax + by = c$	156
78	Théorème des restes chinois	158
79	Fonction ArcTangente	160
80	Propriété de l'ArcTangente	162
81	Nombre π et suite de Fibonacci	164
82	Équation matricielle	166
83	Suite géométrique matricielle et suites couplées	168
84	Formule de Binet	170
85	Graphe probabiliste à deux sommets	172
86	Graphe probabiliste à trois sommets	174
87	Puissances d'une matrice	176
88	Calcul de l'aire d'un secteur	178
89	Intégration par parties	180
90	Décomposition en éléments simples	182
91	Somme des inverses des factorielles	184
92	Nombre e	186

93	Étude d'une suite définie par une intégrale	188
94	Étude d'une loi exponentielle	190
95	Constante d'Euler	192
96	Équations différentielles avec second membre trigonométrique	194
97	Équation différentielle du type $y'' = \omega^2 y$	196
98	Loi de refroidissement de Newton	198
99	Changement de fonction – Loi de Verhulst	200
100	Vitesse d'un parachutiste	202
A	Cercle trigonométrique	204
B	Tableau des dérivées usuelles	205
C	Opérations sur les dérivées	206
D	Tableau des primitives usuelles	207
E	Formulaire de trigonométrie circulaire	209
F	Formulaire de trigonométrie hyperbolique	211

Introduction

Le passage entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur est souvent un moment fort et parfois délicat dans la vie des étudiants. En effet, les jeunes lycéens ne sont pas toujours prêts à affronter les exigences de l'enseignement supérieur tant en terme de compétences, de technicité que d'autonomie.

La classe de terminale est essentiellement centrée sur la préparation au baccalauréat et ne peut matériellement pas offrir toutes les ouvertures correspondant à la diversité des cursus universitaires que choisiront les futurs étudiants.

En mathématiques, de nombreuses compétences doivent implicitement être maîtrisées afin d'envisager sereinement le niveau L_1 des diverses licences scientifiques.

Cet ouvrage propose donc 100 exercices qui permettront aux futurs étudiants de retravailler et approfondir ces diverses compétences. Ces exercices couvrent un large spectre de domaines mathématiques (analyse, dénombrement, suites, nombres complexes, géométrie, etc.) et permettront à tous les étudiants envisageant une licence (ou autres cursus) de consolider leur niveau. Certains exercices sont des grands classiques, d'autres sont plus originaux. Certains sont très abordables, d'autres le sont moins. Dans l'ensemble, ils peuvent tous se résoudre avec les connaissances d'un bac général avec la spécialité mathématiques. Certaines notions d'enseignement supérieur sont cependant abordées pour aider les étudiants à réaliser cette transition le plus efficacement possible. Les exercices sont répertoriés par compétences ou savoir-faire (voir tableau ci-contre indiquant, pour chaque compétence, les numéros d'exercices correspondants). Cela permet au lecteur de cibler ce qu'il souhaite travailler. Il n'est pas nécessaire de faire une lecture linéaire de l'ouvrage.

Liste des compétences utilisées dans les exercices

Appliquer	28 44 46 47 48 53 65 71 77 81 96 98
Canoniser	36 40 51 52 56 57 59 64 66 67 72 90
Changer de registre	49 58 60
Changement de fonction	97 99 100
Changement de variable	67 80 90
Combiner	4 8 9 15 17 18 20 21 23 24 25 54 70 71 77 78
Comparer	1 2 10 12 18 20 27 32 33 35 38 39 76 88 91 95
Composer	35 65 79
Confronter	3 16 36 42
Conjecturer	1 5 72 73 75
Décomposer	10 11 14 19 53 54 69 87 90 91
Dénombrer	15 16 17 18 20 21
Développer	34 39 52 57 59 60 61 65 72 87
Dériver	5 6 7 28 29 31 32 35 38 47 50 51 88 89 97
Dériver une composée	30 37 79 95
Encadrer	5 12 33 35 38 45 92 93
Étudier des variations	5 6 7 27 29 30 32 38 50 79 88 95
Étudier une limite	4 5 6 7 8 10 11 12 14 30 33 34 35 46 79 81 92 93
Étudier un signe	1 32 95
Expliciter	4 83 84
Factoriser	19 27 34 52 57 59 62 66 68 72 82
Généraliser	1 21 15 37
Identifier	57 59 60 61 62 66 68 90
Illustrer	64 80
Intégrer	11 88 90 93 94 95
Intégrer par parties	89 92
Interpréter	41 58 85 86 94
Inverser	10 11 12 22 82 91 93 99
Majorer (ou minorer)	1 11 31 32 38 39 91 93 95
Modéliser	3 15 16 17 25 32 37 41 42 43 55 56 82 85 86 100
Primitiver	61 89 96
Programmer	29 70
Rais. par disjonction des cas	8 9 22 27 28 35 46 73 76
Raisonner par l'absurde	8 10 22 31 46 48 69 73 75
Raisonner par récurrence	1 5 6 7 12 13 18 26 48 76 83 84 91 92
Repérer et représenter	30 40 41 43 44 50 51 80
Résoudre une équation	2 4 5 6 7 36 40 49 51 52 64 67 77 94 98 100
Rés. une équation dans \mathbb{C}	57 58 62 66
Résoudre une équation diff.	96 97 98 99 100
Résoudre une inéquation	3 36 37 43 88 99
Résoudre un système	17 23 24 25 26 55 56 57 59 63 66 78 82 85 86 96
Sommer	8 9 10 11 13 14 17 19 20 65 68 81 91 92
Sommer via une formule	2 3 62 63 75
Spécialiser	31 33 44 48 49 63 80 90 96 80
Substituer	23 24 55 63 86
Symétriser	42 45 46 54 67 68
Télescoper	8 13 14 81 95
Tester	29 40 73 75
Transposer, Transformer	13 27 34 36 44 53 76
Trier	36 49
Utiliser une suite auxiliaire	4 6 7 9
Vérifier, contrôler	36 49 52 70 83 84 87

1

Exercice Raisonner par récurrence

[COMPÉTENCES : Conjecturer - Comparer - Étudier un signe - Généraliser - Majorer - Récurrence]

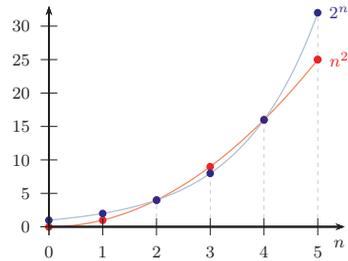
Démontrer que, pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier à préciser, on a :

$$n^2 \leq 2^n$$

Soit \mathcal{P} la propriété définie par : $\mathcal{P}(n) : n^2 \leq 2^n$

L'énoncé ne nous fournit pas la valeur de l'entier n_0 pour lequel cette propriété est initialisée. Calculons les premières valeurs de n^2 et 2^n afin d'émettre une conjecture.

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
2^n	1	2	4	8	16	32



On constate que la propriété \mathcal{P} est vraie pour $n = 0, 1$ et 2 mais pas pour $n = 3$ puis redevient vraie pour $n = 4$ et semble-t-il définitivement. On a donc, bien sûr, $\mathcal{P}(4)$ d'après le tableau ci-dessus ce qui permet d'initialiser la récurrence pour $n_0 = 4$.

Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel $n \geq 4$ on ait :

$$\mathcal{P}(n) : n^2 \leq 2^n$$

Alors, sous cette condition, notre objectif va être d'en déduire que l'on a également :

$$\mathcal{P}(n+1) : (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$$

Élaborons une déduction en partant du développement suivant :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Développement que nous allons majorer étapes par étapes (d'autres façons de raisonner sont possibles!). Nous pouvons écrire :

$$(n+1)^2 \leq n^2 + 2n + \overset{\text{car } 4 \leq n}{2} \leq n^2 + 2n + \overset{\text{car } 4 \leq n}{2n} \leq n^2 + \overset{\text{car } 4 \leq n}{4n} \leq n^2 + \overset{\text{car } 4 \leq n}{n^2} \leq 2 \times \overset{\text{car } 4 \leq n}{n^2} \leq 2 \times \overset{\text{car } 4 \leq n}{2^n} \leq 2^{n+1}$$

car $n \geq 4$ (et donc $n \geq 1$)
car on a supposé $\mathcal{P}(n) : n^2 \leq 2^n$

On obtient ainsi : $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$

Ce qui est $\mathcal{P}(n + 1)$.

On a donc prouvé que la propriété \mathcal{P} est héréditaire à partir du rang 4. Comme, par ailleurs, elle est vraie au rang 4, elle est donc vraie pour tout $n \geq 4$.

Conclusion : $\forall n \geq 4$, on a bien : $n^2 \leq 2^n$

Question de prolongement

Comparer n^3 et 3^n . Comparer n^4 et 4^n . Etc.

Il s'agit de généraliser la situation en comparant n^a et a^n pour $a \geq 3$.

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par :

$$u_n = \frac{n^a}{a^n} \text{ et } v_n = \ln(u_n) = a \ln(n) - n \ln(a)$$

Étudions le signe de la fonction f_a définie pour $x > 0$ par :

$$f_a(x) = a \ln(x) - x \ln(a)$$

La fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'_a(x) = \frac{a}{x} - \ln(a)$.

On a alors : $f'_a(x) \geq 0 \iff \frac{a}{x} - \ln(a) \geq 0 \iff x \leq \frac{a}{\ln(a)}$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{a}{\ln(a)}$	a	$+\infty$
Signe de $f'_a(x)$		+	0	-
Variations de la fonction f_a				

Noter que $\frac{a}{\ln(a)} < a$ car $\ln(a) > 1$ puisque $a \geq 3 > e$.

Puisque la fonction f_a est décroissante sur l'intervalle $[\frac{a}{\ln(a)}, +\infty[$ avec $f_a(a) = 0$, on en déduit que la fonction f_a est **négative** sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Il en va de même pour la suite (v_n) pour $n \geq a$ puisque $v_n = f_a(n)$.

Et comme $u_n = e^{v_n}$, on a $u_n \leq 1$, c'est-à-dire :

$$\forall n \geq a, n^a \leq a^n$$

Par exemple, on a $n^5 \leq 5^n$ pour tout $n \geq 5$.

2

Exercice Suite arithmétique

[COMPÉTENCES : Modéliser - Résoudre une équation - Sommer via une formule]

Pour creuser un tunnel, une entreprise fournit le devis suivant :

- installation du chantier : 50000 €
- coût du forage du premier hectomètre : 70000 €
- chaque hectomètre supplémentaire coûte 5000 € de plus que le précédent.

On désigne par u_n le coût, en milliers d'euros, du forage du $n^{\text{ième}}$ hectomètre.

1. Expliquer pourquoi cette suite (u_n) est arithmétique.

Préciser sa raison r .

2. Exprimer u_n en fonction de n .

Que vaut u_{12} ?

3. On note s_n le coût total, en k€, du forage de n hectomètres (sans compter l'installation du chantier).

On a donc $s_1 = 70$ et $s_2 = 70 + 75 = 145$.

Exprimer s_n en fonction de n . En déduire s_{12} .

4. En réalité, le coût total du forage, installation du chantier comprise, a été de 1920 milliers euros. Combien d'hectomètres ont été forés ?

1. On passe de chaque terme au suivant en ajoutant 5 milliers d'euros.

La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 5$.

2. Dans le contexte d'une suite arithmétique, on passe du terme u_0 au terme u_n en ajoutant n fois la raison r :

$$u_n = u_0 + nr$$

Mais ici, la suite est indexée à partir de $n = 1$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r = 70 + 5(n - 1) = 65 + 5n$$

Notons que l'on retrouve bien $u_1 = 70$ et $u_2 = 75$ avec cette formule.

On en déduit :

$$u_{12} = 65 + 5 \times 12 = 125$$

Le coût du forage du 12^e hectomètre sera de 125000 euros.

3. Il s'agit de calculer la somme suivante :

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Nous savons que la somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante :

$$S = \frac{N(P + D)}{2}$$

où P est le premier terme de la somme et D le dernier.

Ici, notre somme contient n termes et via la relation ci-dessus, on a :

$$s_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(70 + (65 + 5n))}{2} = \frac{n(135 + 5n)}{2}$$

Et en particulier :
$$s_{12} = \frac{12(135 + 5 \times 12)}{2} = 1170$$

Le coût du forage d'un total de 12 hectomètres sera de 1170000 euros.

4. Il faut donc résoudre l'équation :

$$\underbrace{\frac{n(135 + 5n)}{2}}_{\text{coût total de forage de } n \text{ hectomètres}} + \underbrace{50}_{\text{installation du chantier}} = 1920$$

Multiplions par 2 :
$$n(135 + 5n) + 100 = 3840$$

Développons :
$$135n + 5n^2 - 3740 = 0$$

$$5n^2 + 135n - 3740 = 0$$

Simplifions par 5 :
$$n^2 + 27n - 748 = 0$$

On obtient une équation du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 27^2 - 4 \times 1 \times (-748) = 3721$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions mathématiques :

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-27 - 61}{2} = -44$$

et

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-27 + 61}{2} = 17$$

Mais $n \in \mathbb{N}$, il y a donc une seule solution au problème posé, à savoir $n = 17$.

En conclusion, si le coût total est de 1920 k€ (installation du chantier comprise), c'est que l'entreprise a foré 17 hectomètres.

3

Exercice

Suite géométrique

[COMPÉTENCES : Confronter - Résoudre une inéquation - Sommer via une formule]

Dans un pays fictif, un étudiant paye, en 2020, un loyer mensuel de 400 € pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%.

On note u_n le loyer mensuel après de l'année 2020 + n , ainsi $u_0 = 400$.

- Calculer u_1 , c'est-à-dire le montant du loyer mensuel lors de l'année 2021.
- Exprimer u_n en fonction de n .
- En 2026, le loyer mensuel aura augmenté par rapport à 2020 d'environ :

42%

50%

13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

- Si l'étudiant compte rester jusqu'en 2026 inclus dans sa location, quelle sera la somme totale payée pour l'ensemble de tous les loyers ?
- Durant quelle année cette somme totale dépassera-t-elle 96000 € ?

- Une augmentation de 7% se traduit via une multiplication par le coefficient $\left(1 + \frac{7}{100}\right) = 1,07$.

Ainsi :

$$u_1 = 1,07 \times u_0 = 428$$

En 2021, le montant du loyer mensuel de cet étudiant est de 428 euros.

- Chaque année, le montant du loyer est multiplié par le même nombre, à savoir $q = 1,07$. La suite (u_n) est donc géométrique.

On a donc pour tout rang n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 400 \times 1,07^n$$

- Il s'agit de calculer u_6 . D'après la question précédente :

$$u_6 = 400 \times 1,07^6 \approx 600$$

Le montant du loyer est passé de 400 euros à 600 euros, il a donc augmenté de 50%. On peut le voir également en calculant juste $1,07^6 \approx 1,50$. Bref :

42%

50%

13%

Ainsi, avec les pourcentages, 6 augmentations successives de 7% ne donnent pas une augmentation de 42% mais bel et bien une augmentation de 50%.

- L'année initiale, l'étudiant paye un loyer annuel égal à :

$$12u_0 = 12 \times 400 = 4800 \text{ euros}$$

Après une année d'occupation, l'étudiant paye un loyer annuel égal à :

$$12u_1 = 12 \times 428 = 5136 \text{ euros}$$

Et ainsi de suite. Il s'agit donc de calculer la somme suivante :

$$S_6 = 12u_0 + 12u_1 + \dots + 12u_6 = 12(u_0 + u_1 + \dots + u_6)$$

Rappelons la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Dans notre cas $n = 6$ et la somme contient bien sûr 7 termes (on démarre à u_0) ce qui donne (en multipliant également par 12 pour se ramener au calcul du loyer annuel) :

$$S_6 = 12 \times \frac{400(1 - 1,07^7)}{1 - 1,07} = \frac{4800(1 - 1,07^7)}{-0,07} \approx 41539,30$$

S'il occupe ce logement jusqu'en 2026 inclus, l'étudiant doit donc prévoir un budget de 41539 euros pour ses loyers.

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation (d'inconnue le rang n de l'année) suivante :

$$\frac{4800(1 - 1,07^{n+1})}{1 - 1,07} \geq 96000$$

On isole le terme $1,07^n$ afin d'envisager un passage au logarithme :

$$\frac{1 - 1,07^{n+1}}{-0,07} \geq 20 \iff 1 - 1,07^n \leq -1,4 \iff 1,07^n \geq 2,4$$

Par croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$ et tenant compte de la relation $\ln(A^N) = N \ln(A)$ (pour $A > 0$ et $N \in \mathbb{N}$) :

$$(n + 1) \ln(1,07) \geq \ln(2,4)$$

Et comme $\ln(1,07) > 0$ (car $1,07 > 1$) et que n est un entier :

$$n + 1 \geq \frac{\ln(2,4)}{\ln(1,07)} \quad \text{d'où} \quad n \geq 12$$

C'est donc durant l'année 2032 que le cumul des loyers dépassera les 96000 euros.

4

Exercice Suite arithmético- géométrique

[COMPÉTENCES : Combiner - Étudier une limite - Expliciter - Résoudre une équation - Suite auxiliaire]

Dans une région, la population de loups diminue de 20% chaque année. Pour éviter qu'elle ne disparaisse, les écologistes réintroduisent 20 loups chaque année. En 2020, il y avait 200 loups dans cette région. On modélise cette situation par une suite (u_n) définie par $u_0 = 200$ et :

$$u_{n+1} = 0,80u_n + 20$$

où n est le nombre d'années écoulées après 2020.

1. On pose $v_n = u_n - \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer le réel α afin que la suite (v_n) soit géométrique.

2. En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n .
3. À long terme, cette population de loups va-t-elle se stabiliser ?

1. La suite (v_n) est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout rang n , $v_{n+1} = qv_n$.

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha = 0,80u_n + 20 - \alpha = 0,80(v_n + \alpha) + 20 - \alpha \\ &= 0,80v_n + 20 - 0,20\alpha \end{aligned}$$

Pour que la suite (v_n) soit géométrique, il faut et il suffit que $20 - 0,20\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 100$.

On a donc $v_n = u_n - 100$ et $v_0 = u_0 - 100 = 200 - 100 = 100$.

2. Puisque la suite (v_n) est géométrique, on a :

$$v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0,80^n$$

Et *via* la relation $v_n = u_n - 100$, on en déduit :

$$u_n = v_n + 100 = 100 \times 0,80^n + 100$$

3. Puisque $0,80 \in]-1, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,80^n = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 100$$

À long terme, le nombre de loups va se stabiliser à 100 bêtes.

Question de prolongement

Déterminer une formule explicite pour la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ où } a \neq 1 \text{ et } b \neq 0$$

Déjà, si la suite (u_n) converge vers un réel α alors par continuité de la fonction affine $x \mapsto ax + b$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + b$$
$$\alpha = a\alpha + b \quad \text{c-à-d} \quad (1-a)\alpha = b$$

Et puisque $a \neq 1$:

$$\alpha = \frac{b}{1-a}$$

Ce réel α s'appelle le *point fixe*¹ de la suite (u_n) .

On pose ensuite, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \alpha$ ainsi :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n + (1-a)\alpha - \alpha = au_n - a\alpha$$
$$= a(u_n - \alpha) = av_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a .

On peut aussi retrancher, membre à membre les deux lignes suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= & au_n + b \\ \alpha &= & a\alpha + b \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$$

Et on retrouve bien :

$$v_{n+1} = av_n$$

Puisque cette suite (v_n) est géométrique, on a pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha) a^n$$

D'où la formule explicite donnant le terme général u_n :

$$u_n = (u_0 - \alpha) a^n + \alpha$$

Bien sûr, si $u_0 = \alpha$, alors la suite (u_n) est constante.

Si $a \in]-1, 1[$, alors la suite (u_n) converge vers son point fixe α .

Si $a > 1$ (et $u_0 \neq \alpha$), alors la suite (u_n) diverge vers $\pm\infty$ (selon que $u_0 > \alpha$ ou $u_0 < \alpha$).

1. Cela signifie que si la suite (u_n) converge, cela ne peut être que vers ce point fixe α . Mais ce point fixe α joue également un rôle même si la suite (u_n) diverge.

5

Exercice

Suite récurrente

[COMPÉTENCES : Conjecturer - Dériver - Encadrer - Équation - Limite - Récurrence - Variations]

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= & 3 \\ u_{n+1} &= & \frac{1}{5}u_n(u_n + 1) \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de cette suite ?

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{5}x(x + 1)$$

Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0, 4]$.

3. En utilisant la fonction f précédente, démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer sa limite ℓ .

1. On a :

$$u_1 = \frac{1}{5}u_0(u_0 + 1) = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$u_2 = \frac{1}{5}u_1(u_1 + 1) = \frac{1}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{17}{5} = \frac{204}{125} = 1,632$$

$$u_3 = \frac{1}{5}u_2(u_2 + 1) = \frac{1}{5} \times \frac{204}{125} \times \frac{329}{125} = \frac{67116}{78125} = 0,859$$

Cette suite semble décroissante.

2. La fonction f est le produit de deux fonctions affines (à savoir $x \mapsto \frac{1}{5}x$ et $x \mapsto x + 1$) positives et croissantes sur l'intervalle $[0, 4]$, elle est donc croissante sur cet intervalle.

On peut également calculer sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{5}(2x + 1)$$

et on constate que l'on a bien $f'(x) \geq 0$ lorsque $x \in [0, 4]$.

Par conséquent, la fonction f est bien croissante sur l'intervalle $[0, 4]$.

3. On considère la propriété \mathcal{P} définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

- on a bien $\mathcal{P}(0)$ car $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$.
- supposons $\mathcal{P}(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

On applique la fonction croissante f à ces inégalités :

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq 4$$

Or $f(0) = 0$ et $f(4) = 4$ d'où :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

Ce qui correspond à $\mathcal{P}(n+1)$.

On a montré que la propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geq 0$), elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit deux informations :

- la suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$);
- la suite (u_n) est minorée par 0.

Par conséquent, la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0, 4]$.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

avec f continue. Par conséquent, par passage à la limite, il vient :

$$\ell = f(\ell)$$

$$\ell = \frac{1}{5}\ell(\ell + 1)$$

$$5\ell = \ell^2 + \ell$$

$$\ell^2 - 4\ell = 0$$

$$\ell(\ell - 4) = 0$$

$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = 4$$

Or, la suite (u_n) est décroissante avec $u_0 = 3$. Elle ne peut donc pas converger vers 4. Par conséquent, cette suite converge vers 0.

